

PERITOS FORENSES

DIAGONAL 75 B 32BB 06 TES. 3122878147 - 312889941
MEDELLÍN - COLOMBIA

Medellín 14 de noviembre de 2017

E. S. D.

Señores

JESUS AZAEL HERNANDEZ BRAVO

DOLLY de JESUS GUTIERREZ DE HERNANDEZ

SANTA BARBARA- ANTIOQUIA

La Ciudad

Asunto: **DICTAMEN PERICIAL**

Radicado:

PATRICIA MORALES VEGA, mayor de edad, vecina y residente en Medellín, con cédula de ciudadanía 42962834 de Medellín, Físico de profesión, Especialista en Ciencias Forenses, Balística, Maestría en Ciencias Físicas y en la actualidad estudiante de Doctorado en Física de la Universidad de Antioquia, de todo lo cual se adjuntan los respectivos títulos de idoneidad, y en especial obrando como perito, de la manera más respetuosa me dirijo a Ustedes y a su solicitud, con el fin de rendir dictamen en el accidente de tránsito ocurrido el 29 de Agosto de 2017 a las 6:30 a.m. en el Municipio de Santa Barbara, comuna Bellavista, Pintada - Primavera a la altura del Km11+350, entre la motocicleta TRIUMPLT Figer 800 de placas KSK28C y el furgón CHEVROLET FVR de placas SZZ326

CONTENIDO DEL DICTAMEN

1. Respuesta a lo solicitado.
2. Anexos
3. Conclusión
4. Bibliografía utilizada.

ESPACIO EN BLANCO

ESPACIO EN BLANCO

ESPACIO EN BLANCO



PERITOS FORENSES

DIAGONAL 75 B 3288 06 TES. 3122878147 - 312889941
MEDELLÍN - COLOMBIA

513
372
2

1. Solicitud y respuesta

Conociendo con exactitud las posiciones finales de uno y otro vehículo y además los puntos de impacto de ambos móviles, se le formulará al agente del conocimiento indicando técnicamente la posición final y la distancia, entre ambos motocicleta y motociclista.

Rinda un dictamen sobre la forma y las circunstancias y condiciones en que se pudo haber producido la colisión, la cual es objeto de investigación por parte de las diferentes autoridades Administrativas y Judiciales.

Tras estudiar el expediente de las autoridades de Tránsito del Municipio de Santa Barbara Antioquia, el número C-05679000 y las fotografías aportadas, se explica como ocurre la colisión a partir de los siguientes eventos

- a. El primer evento se tiene cuando los dos móviles tienen contacto físico, es decir cuando la motocicleta TRIUMPLT Figer 800 de placas KSK28C y el furgón CHEVROLET FVR de placas SZZ326 se están moviendo en direcciones opuestas y se encuentran en el mismo punto y en el mismo instante. Dicho punto está en la curva como lo indica el diagrama elaborado por las autoridades de tránsito, así, la motocicleta que circula por su carril impacta con el camión que circula por la línea divisoria mas corta de la curva; de esta manera la motocicleta y motociclista chocan con la parte izquierda del furgón a nivel del tanque de la gasolina, y recorren adheridos al camión una distancia de $1,75m \pm 0,1m$. Después de que la motociclista recorre los 1.75m pegado al furgón, éste, el furgón no detiene su marcha y sigue en su trayectoria, provocado que tanto la motocicleta como el motociclista se desplacen en las trayectorias que dan como resultado las posiciones finales que muestra el informe de las Autoridades de Tránsito. Dicha distancia se calcula, graficando y triangulando según las medidas de las posiciones finales mostradas en el informe policial C-05679000.
- b. En siguiente evento se analiza las situaciones de cada uno de los rodantes por separado.

En el evento del conflicto considerando el sector del impacto, posiciones finales y las características de las masas del cuerpo humano, furgón y la motocicleta se explica:



ESPACIO EN BLANCO

ESPACIO EN BLANCO

ESPACIO EN BLANCO



PERITOS FORENSES

DIAGONAL 75 B 328806 TES. 3122878147 - 312889941
MEDELLÍN - COLOMBIA

- El movimiento independiente del furgón CHEVROLET FVR de placas SZZ326 el cual sigue moviéndose a 23 Km/h según afirma el señor Guevara Carlos Augusto, ya que es monitoreado en forma satelital, hasta la posición de reposo mostrada en la fotografía.
- Para la motocicleta junto con el motociclista que al momento de entrar en contacto con el camión siguen en la trayectoria que éste les determina, ya que continua moviéndose mientras la motocicleta y el motociclista están adheridos al tanque del furgón en un movimiento relativo que deja como consecuencia la huella de arrastre de 1.75m en el tanque del furgón; por esta razón la motocicleta y el motociclista cuando se separan del furgón (peso 17.000 Kilogramos sin carga) sufren una rotación, y debido a que los centros de masa de los cuerpos motocicleta (peso 210 kilogramos) y motociclista (peso de 85 a 95 kilogramos) son independientes, por el principio de la conservación del momentum, cada masa continua en una dirección diferente. Por esta razón la motocicleta queda en su carril, es decir por el que circulaba antes de la colisión, a una distancia de $0.80\text{ m} \pm 0.1\text{ m}$ de la línea amarilla o separación de carril, (ver plano adjunto), en tanto que el motociclista se desplaza en otra dirección como consecuencia del segundo evento cuando se separa del furgón, por lo que queda al otro lado en el carril contrario cerca de la berma derecha a una distancia de $4.5 \pm 0.1\text{ m}$ de la motocicleta. El motociclista entra en un tercer evento al chocar con el pavimento rebotando hasta quedar en la posición de reposo según se observa en el plano de reconstrucción que se adjunta en este dictamen. El rebote se produce como respuesta a la alta velocidad de cuerpo impactado por el furgón y que es con la velocidad que el motociclista es proyectado a la vía (un ejemplo es el de una pelota que cae al piso y luego rebota); esto se reconoce por los residuos del casco en la vía según se observa en la fotografía.



574
373

ESPACIO EN BLANCO

ESPACIO EN BLANCO

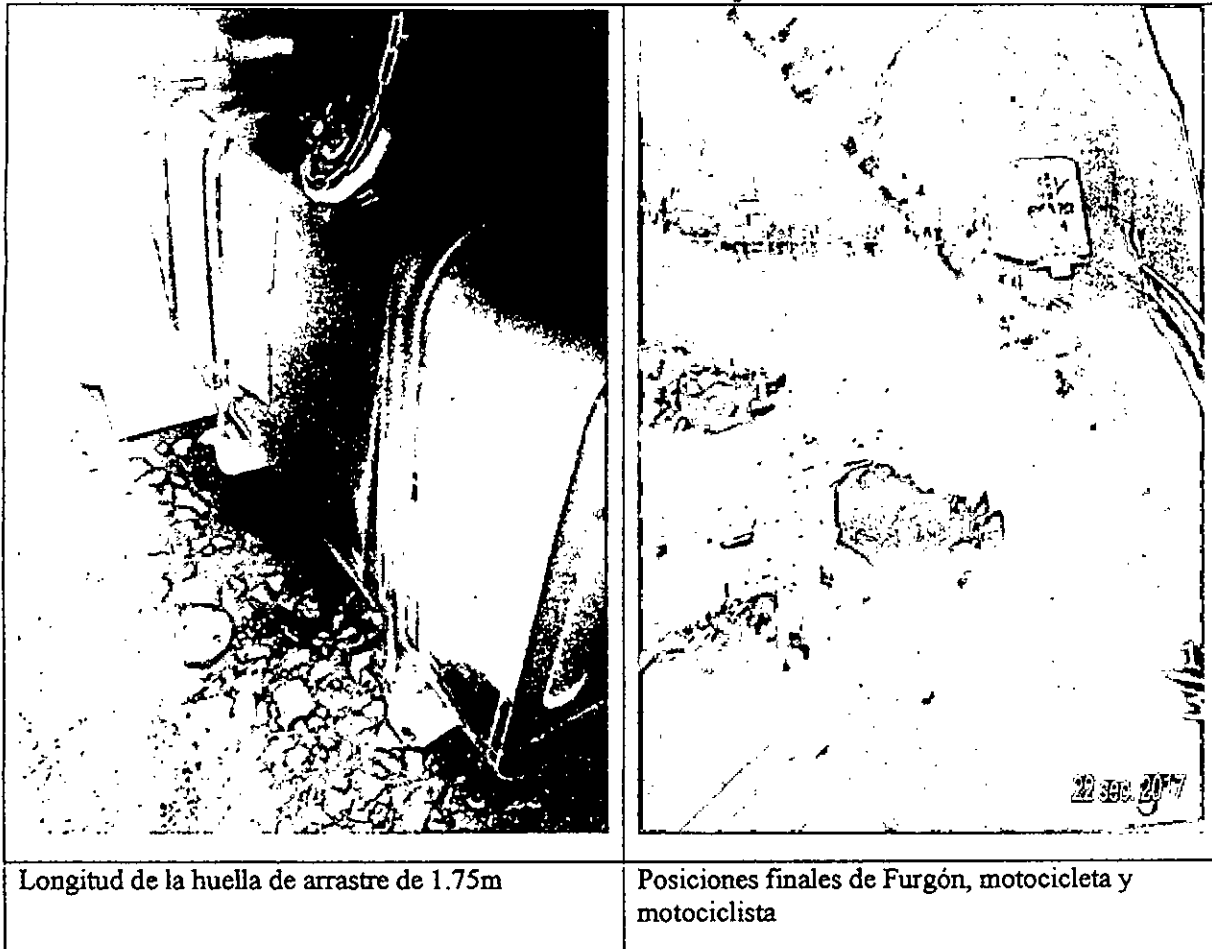
ESPACIO EN BLANCO



575
###

PERITOS FORENSES

DIAGONAL 75°B 32BB 06 TES. 3122878147 - 312889941
MEDELLÍN - COLOMBIA



Fotografía N° 1

Como ya se dijo con los aportes de la fotografía y del informe C-05679000 se elaboró un diagrama vectorial el cual se construye usando modelos que representan los vehículos involucrados y uniendo sus centros de masa para mostrar la trayectoria seguida después de la colisión.

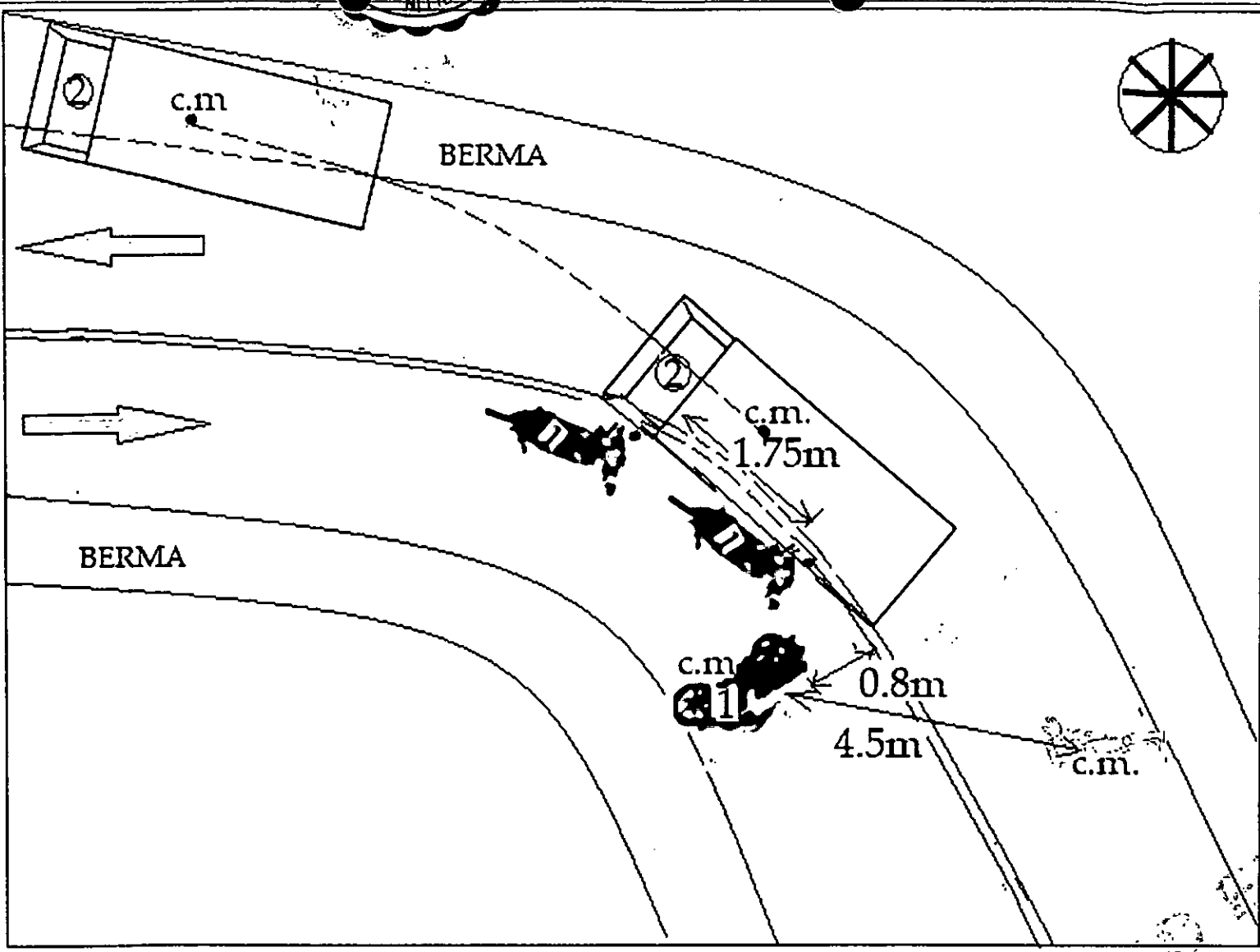
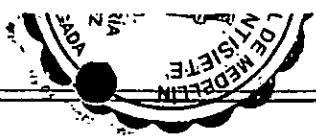


ESPACIO EN BLANCO

ESPACIO EN BLANCO

ESPACIO EN BLANCO

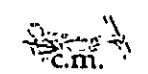




Vehículo
motocicleta



Vehículo camión
FVR CORTO
FORWARD



c.m.
conductor
motocicleta

c.m: centro de masa
m: medidas en
metros

PLANO DE RECONSTRUCCIÓN DEL ACCIDENTE, CON DATOS TOMADOS DEL INFORME POLICIAL: N° C-05679000

CALCULÓ : PATRICIA MORALES VEGA, FÍSICA, ESPECIALISTA EN CIENCIAS FORENSES BALÍSTICA,
MAGISTER EN CIENCIAS FÍSICAS Y ESTUDIANTE DE DOCTORADO EN FÍSICA

DIBUJÓ: ING. DIANA MORALES VEGA

Comuna bellavista
Pintada- Primavera
Km 11 + 350

14/11/2017

5/6

ESPACIO EN BLANCO

ESPACIO EN BLANCO

ESPACIO EN BLANCO



PERITOS FORENSES

DIAGONAL 75 B 32BB 06 TES. 3122878147 - 312889941
MEDELLÍN - COLOMBIA

3. Conclusión

La motocicleta TRIUMPLT Figer 800 de placas KSK28C circula por su carril cuando se encuentra con el furgón CHEVROLET FVR de placas SZZ326 en la curva como se observa en la fotografía N°1

- el furgón CHEVROLET FVR de placas SZZ326 viene por el carril y corta la curva muy cerca de la línea que divide los dos carriles, aunque se produce la colisión el camión sigue en movimiento hasta estacionarse en la berma, como se observa en las fotografías. Se llega a esta conclusión tras reconstruir el accidente, con el movimiento del vehículo furgón tangente a la trayectoria para hacer coincidir los centros de masa: desde la posición final hasta el punto donde el furgón toma la curva muy cerca de la línea de división de los dos carriles.
- La motocicleta que viene por su carril se encuentra con el furgón que circula muy cerca de la línea divisoria de las vías por lo que impacta con la parte izquierda baja del furgón en el tanque de gasolina del mismo, dejando una huella de $1,75m \pm 0,1m$, lo que se observa en la fotografía; como el furgón sigue en movimiento cuando la moto y su conductor se arrastran contra el tanque del furgón, se produce la rotación de la motocicleta y el motociclista cuando el furgón los abandona para estacionarse mas adelante en la berma derecha (ver fotografía). El Camión Furgón nunca se detuvo al momento del impacto. Debido a la masa de la motocicleta esta queda en carril por el que se desplazaba, mientras el que sale lanzado es el conductor de la motocicleta en dirección contraria debido a que su masa es mas pequeña comparada con la del furgón. Como la moto queda en su carril se puede afirmar que circulaba por éste antes de la colisión, lo confirma el informe de tránsito y las fotografías.

En cuanto a las distancias y posiciones finales se muestran en el plano de reconstrucción que se adjunta.

Atentamente:

Morales Vega P.
Morales Vega Patricia
cc: 42 962834

517





**DILIGENCIA DE RECONOCIMIENTO DE FIRMA Y CONTENIDO DE
DOCUMENTO PRIVADO**

Artículo 68 Decreto-Ley 960 de 1970 y Decreto 1069 de 2015



44248

En la ciudad de Medellín, Departamento de Antioquia, República de Colombia, el quince (15) de noviembre de dos mil diecisiete (2017), en la Notaría Veintisiete (27) del Círculo de Medellín, compareció:

PATRICIA DE JESUS MORALES VEGA, identificado con la cédula de ciudadanía / NUIP #0042962834 y declaró que la firma que aparece en el presente documento es suya y el contenido es cierto.

amrals/vega.p

----- Firma autógrafa -----



1dxhysyfo4no
15/11/2017 - 14:30:48:083



Conforme al Artículo 18 del Decreto-Ley 019 de 2012, el compareciente fue identificado mediante cotejo biométrico en línea de su huella dactilar con la información biográfica y biométrica de la base de datos de la Registraduría Nacional del Estado Civil.

Acorde a la autorización del usuario, se dio tratamiento legal relacionado con la protección de sus datos personales y las políticas de seguridad de la información establecidas por la Registraduría Nacional del Estado Civil.

Este folio se asocia al documento de DICTAMEN PERICIAL, en el que aparecen como partes LA ARRIBA FIRMANTE y que contiene la siguiente información RECONOCIMIENTO DE FIRMA Y CONTENIDO.

Liliana María Gil Ramírez



LILIANA MARIA GIL RAMIREZ

Notaria veintisiete (27) del Círculo de Medellín - Encargada

El presente documento puede ser consultado en la página web www.notariasegura.com.co
Número Único de Transacción: 1dxhysyfo4no

PERITOS FORENSES

DIAGONAL 75 B 32BB 06 TES. 3122878147 - 312889941
MEDELLÍN - COLOMBIA

3/3/11
5+8



5. BIBLIOGRAFIA

[1] Helbert Goldstein, Charles Poole & John Safko, "Classical Mechanics, third edition". (Addison Wesley 2002), pp. 208-221.

[2] E. J. Osquiguil. "Fotografía elemental en reconstrucción de accidentes de tránsito. Bariloche, Argentina, 2007.

PERITOS FORENSES

DIAGONAL 75 B 32BB 06 TES. 3122878147 - 312889941
MEDELLÍN - COLOMBIA



CAMIÓN FVR CORTO FORWARD

MOTOR	
Marca/Código	ISXIT-5
Tipo	Tubo cargado in-line cooler
Desplazamiento (cc)	7,290
Velocidad máxima (km/h)	6
Potencia (hp @ RPM)	240 @ 2,400
Torque (kgm @ RPM)	50 @ 1,450
Alimentación	Inyección directa (Common Rail)
Emisiones	Euro II

TRANSMISIÓN	
Marca/Código	235MTD
Tipo	7M4 S VAL. (O/D)
Relación	8.570
Relación final de eje	6.34
Embrague	Asistido por aire
Potencia (CV) (P/TD)	SI

CHASIS	
Función	Asistencia hidráulica
Suspensión	Ballestas semihelic
Amortiguador delantero	2 amortiguadores de doble acción
Sistema de freno	Circuito dual 100% aire
Medidas de banda	SI
	395/60R22.5

PESOS Y CAPACIDADES	
Peso neto (kg)	4,810
Peso bruto vehicular (kg)	17,800
Capacidad de carga (kg)	12,050
Capacidad máxima	6,300
Tanque de combustible (litros)	13,000
	200

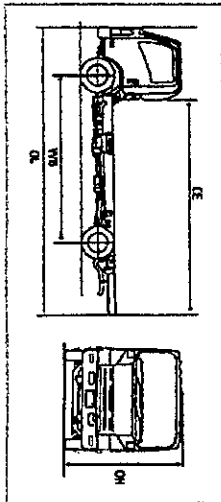
SISTEMA ELÉCTRICO	
Batería	12V 70 Ah x 2
Alternador	24V - 60 A

APARIENCIA EXTERIOR	
Contorno	Contorno "Chaparral"
Equipos auxiliares externos (V)	Cables abridor
Rueda de repuesto	Rueda de repuesto

PANEL DE INSTRUMENTOS	
CONTROLES Y MEDIDORES	
Odómetro	Nivel de combustible
Tachómetro	Temperatura de agua
Velocímetro km/h	Alarma sonora de inversión
Alarma sonora de inversión	Agua recalentada de motor

USOS INDICADOS	
Baja presión de agua	
Freno de parque / Freno del sistema de frenos	
Cable de freno	
Servicio	

SEGURIDAD	
Construcción de seguridad de 2 puntos y con 2 puntos	
Luces frontales halógenas	
Pila eléctrica	
Tanque combustible con llave	
Cinturón de seguridad de 3 puntos y 2 puntos	



CONVENIENCIA Y APARIENCIA INTERIOR	
Estructura de ripados	
Barrido en espaldas exterior central	
Apoyabrazos sillon conductor / pasajero	
Asientos central	
Asientos en vidrio rectos	
Vidrios eléctricos	
Bloqueo central	
Medicinas delanteras	
Cinturón en puerta del conductor	
Ventilador y calefactor	
Pantallas interiores	
Pantallas interiores (2 pantallas y antena)	
Manijas (2 manijas en puerta, 4 de acceso)	
Planchas ajustables (3)	
Portavozes	
Cinturón (2 de arriba y 1 en millas)	
Cable exterior (Comando)	

DIMENSIONES	
VW (mm)	3,500
OL (mm)	6,255
OH (mm)	2,885
OV (mm)	2,400

CONVENIENCIA	
Chasis	1,800 x 50,000 km
Motor	1,800 x 50,000 km

Reguladores de luz.
Reguladores de columna en posición de conducción.
Reguladores de la dirección de transporte activo.
Reguladores de la DADA activa.
Especificaciones sujetas a cambio sin previo aviso.

CONCEMOS SU NEGOCIO

CONCEMOS SU NEGOCIO

CHEVROLET

PERITOS FORENSES

DIAGONAL 75 B 32B8 06 TES. 3122878147 - 312889941
MEDELLÍN - COLOMBIA

375
580



Triumph Tiger 800 2011

[Inicio](#) [Pruebas](#) [Fotos](#) [Opción](#) [Noticias](#)

La gama Adventure con llantas de aleación para los que no buscan alejarse del asfalto y al buscar emociones en su conducción, tanto en cortas como en largas distancias.



Ficha técnica de la Triumph Tiger 800 2011

MOTOR

Tipo	Refrigeración líquida, 12 válvulas, doble árbol de levas en culata, 3 cilindros en línea
Cilindrada	769cc
Diámetro/Carrera	74 x 61,8 mm
Sistema de combustible	Inyección electrónica de combustible secuencial multipunto
Escape	Acero inoxidable 3 en 1
Embrague	Multidisco en baño de aceite
Caja de cambios	6 velocidades
Capacidad de aceite	3,7 litros

PARTE CHASIS

Chasis	Viga de aluminio multitubular
Basecanta	Doble brazo, dirección de aluminio fundido
Ruedas Delanteras	Aleación de aluminio fundido de 10 radios 19 x 2,5 pulgadas
Ruedas Traseras	Aleación de aluminio fundido de 10 radios 17 x 4,25 pulgadas
Neumáticos Delanteros	110/80 ZR 19
Neumáticos Traseros	150/70 ZR 17

PERITOS FORENSES

DIAGONAL 75 B 32BB 06 TES. 3122878147 – 312889941

MEDELLÍN - COLOMBIA



Suspensión Delantera	Horquillas Invertidas Showa de 40mm, recorrido de 180mm
Suspensión Trasera	Monocromoguardador Showa con ajuste en precarga, recorrido de la rueda trasera de 170mm
Frenos Delanteros	Disco flotante dobles de 302mm, pinza Nissan flotante de 2 pistones (ABS disponible)
Frenos Traseros	Disco individual de 255mm, pinza flotante Nissan de 1 pistón. (ABS disponible)
Cilindro maestro del freno delantero	Cilindro maestro Nissan, 19mm de diámetro
Quadro de Instrumentos. Otras características y ventajas	Quadro de Instrumentos multifuncional LCD con velocímetro digital, ordenador de a bordo, tacómetro analógico, indicador de marcha engranada, preinstalación para sistema TPMS, ABS desconectable y retaj

DETALLADO

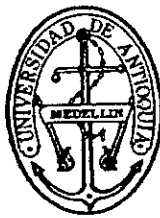
Longitud	2.215 mm
Anchura (manillares)	795 mm
Altura sin espejos	1.350 mm
Altura del sillín	810 mm
Distancia entre ejes	1.555 mm
Lanzamiento/Avance	23.7/26.2 mm
Capacidad del depósito de combustible	19 litros
Peso en orden de marcha	210 kg

PRESTACIONES

Potencia máxima	95 cv / 694bhp / 70kW @ 8300rpm
Parr máxima	79Nm / 58Libra @ 7850rpm

FINANCIACIÓN

Seguro	Cebular Seguro
Contacto fabricante	undefined
Financiación	Calcular Financiación
Encuentra la concesionario	Lista de concesionarios y talleres



582
5/11/91

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Acta Individual de Graduación No. 11075

DEPENDENCIA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

PROGRAMA FISICA

APROBACION DEL PROGRAMA Resol.002536 de Octubre 11/88 del ICFES

FECHA Diciembre 13, 1991

LUGAR TEATRO CAMILO TORRES

En la fecha y lugar señalados se reunieron el doctor LUIS ENRIQUE RUIZ GIRALDO Decano de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y el doctor TITO A. MACHADO CARTAGENA, Vicedecano, con el propósito de conferir el título de **FISICA** a **PATRICIA DE JESUS MORALES VEGA** identificado con cédula de ciudadanía No. 42.962.834 de Medellín (Ant.)

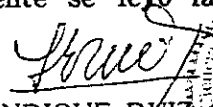
El secretario leyó la providencia por la cual el señor Rector autorizó la ceremonia de graduación y el Presidente tomó al graduando, este juramento.

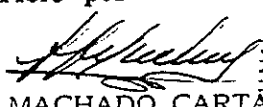
"JURAI A DIOS Y PROMETEIS A LA PATRIA ACATAR Y CUMPLIR LA CONSTITUCION Y LAS LEYES DE LA REPUBLICA, SOSTENER SU INDEPENDENCIA Y LIBERTAD. PRACTICAR VUESTRA PROFESION DE ACUERDO CON LAS NORMAS DE MORAL PROFESIONAL Y TRABAJAR POR EL PROGRESO DE LA UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA? A lo cual contestó el graduando: SI JURO.

El Presidente agregó: SI ASI LO HICIEREIS, DIOS Y LA PATRIA OS LO PREMIEN, SI NO, EL Y ELLA OS LO DEMANDEN."

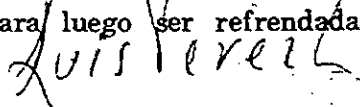
Seguidamente el Señor Presidente entregó al graduando el Diploma por medio del cual la Universidad en nombre de la República, lo declara idóneo para el ejercicio de la profesión de FISICA.

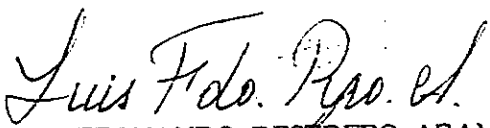
Finalmente se leyó la presente acta y se suscribió por:

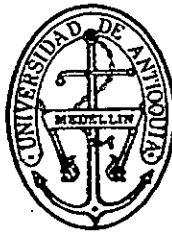

LUIS ENRIQUE RUIZ GIRALDO
Presidente


TITO A. MACHADO CARTAGENA
Secretario

Titular *Patricia Morales Vega*
Para luego ser refrendada por


LUIS PEREZ GUTIERREZ
Rector de la Universidad


LUIS FERNANDO RESTREPO ARAMBURO
Secretario General de la Universidad



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Acta Individual de Graduación No. 27151

DEPENDENCIA: FACULTAD DE DERECHO Y CIENCIAS POLITICAS

PROGRAMA DE POSTGRADO: ESPEC. EN CIENCIAS FORENSES - BALISTICA

APROBACION DEL PROGRAMA: ACUERDO No.037 DEL 08-04-91 ICFES

FECHA: 16 DE DICIEMBRE DE 1997

LUGAR: TEATRO UNIVERSITARIO CAMILO TORRES

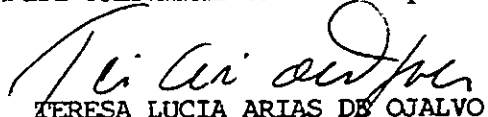
En atención a que **PATRICIA DE JESUS MORALES VEGA**

con cédula de ciudadanía No. 42.962.834 de **MEDELLIN**

cumplió satisfactoriamente los requisitos exigidos por las normas legales y estatutarias, le expide el título de **ESPECIALISTA EN CIENCIAS**

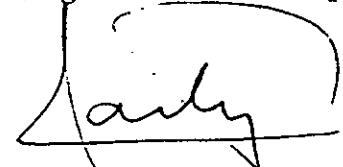
FORENSES - BALISTICA

Para constancia se suscribe por:


TERESA LUCIA ARIAS DE OJALVO
Decano


PATRICIA DE JESUS MORALES VEGA
Titular

Para luego ser refrendada por


JAIME RESTREPO CUARTAS
Rector de la Universidad


LUIS FERNANDO MEJIA VELEZ
Secretario General de la Universidad

584
272



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

SEDE MEDELLÍN

REGISTRO Y MATRÍCULA

DIRECCIÓN ACADÉMICA

REGISTRO DE DIPLOMAS

LIBRO: 027

FOLIO: 085

Patricia de Jesús Morales Vega

C.C. 42962834

OBTUVO EL TÍTULO DE:

Magíster en Ciencias-Física

Número de diploma 0015415 y Acta de Grado 480 de 30 de Junio de 2006
Concedido por el Consejo de la Facultad de Ciencias
En sesión del 30 de junio de 2006 , Acta No 19

Dado en Medellín, a los 30 días del mes de junio de 2006


GILMA CASTAÑO RESTREPO
Jefa Registro y Matricula

patricia.morales@udea.edu.co

Ecuaciones de Euler y el Movimiento del Trompo

P. Morales, D. E. Jaramillo, J. M. Mira
Instituto de Física, Universidad de Antioquia, A.A. 12 26, Medellín, Colombia

En este trabajo hacemos una revisión didáctica de las ecuaciones de Euler para el cuerpo rígido simétrico. Mostramos que ausencia de fuerzas disipativas y en presencia del campo gravitacional las ecuaciones de Euler se pueden escribir como una ecuación no lineal sobre las componentes de la proyección estereoscópica de Riemann del vector principal en un plano tangente al polo en dirección del campo gravitacional. Finalmente bajo la aproximación de nutación de pequeña amplitud se encuentra solución a dicha ecuación.

Descriptores: Movimiento del trompo, Ecuaciones de Euler.

Keywords:

PACS: 42.25.Gy, 42.25.Lc.

I. INTRODUCCIÓN

El movimiento del trompo siempre ha creado curiosidad a todas las generaciones de físicos, básicamente en relación a la estabilidad que parece adquirir con el movimiento rotacional. Desde Euler se conoce bien la dinámica de este movimiento y son innumerables los artefactos que se han construido aprovechando estas características de los cuerpos en rotación. No es desconocido el uso de giróscopos en los sistemas de navegación de alta confiabilidad.

Aunque La teoría Newtoniana del movimiento puede explicar este comportamiento, las ecuaciones de Newton, que para un cuerpo rígido toman la forma de las ecuaciones de Euler, son, generalmente, de difícil solución. La forma usual de hallar la solución al movimiento de un cuerpo rígido es a través de la formulación Lagrangiana, que corresponde a una primera integral de las ecuaciones de Euler, y hace explícita, además, las cantidades conservadas asociadas a las simetrías del problema. Sin embargo, el movimiento del trompo exhibe una riqueza física de carácter más intuitivo, tal que en las formulaciones más elaboradas de la mecánica tiende a ocultarse. En este trabajo, nos centraremos en las ecuaciones de Euler, desde la formulación primigenia de la mecánica y en la solución de dichas ecuaciones.

El artículo está organizado de la siguiente forma: En la sección II se hace una breve discusión acerca de los sistemas de referencia en los cuales las ecuaciones de Euler son válidas. En la sección III se escriben las ecuaciones de Euler para el trompo simétrico en el plano complejo, donde la variable que da cuenta del movimiento del sólido corresponde a la proyección de Riemann de vector unitario en la dirección del eje principal del trompo. En la sección IV se soluciona la ecuación del trompo en el régimen adiabático y se modela la fricción y el efecto Magnus. En la sección V se reportan las experiencias con un giróscopo comercial en el que se trata de corroborar las predicciones del modelo utilizando un apuntador laser

ubicado en forma estratégica para visualizar la proyección de Riemann en el plano horizontal. Por último en la sección VI se hace un análisis de los datos y se dan las conclusiones.

II. ECUACIONES DE EULER

El cuerpo rígido es un sistema de muchas partículas donde la distancia relativa entre cada par de ellas es supuesta constante, esto permite describir completamente el movimiento del cuerpo con seis grados de libertad. Tres de estos se pueden asociar con el movimiento del centro de masa y los otros tres con el movimiento del cuerpo alrededor del centro de masa, movimientos que, respectivamente, corresponden a los de traslación y rotación del cuerpo.

La dinámica del centro de masa se rige por las ecuaciones de Newton para una partícula puntual, en tanto que el movimiento de rotación, alrededor del centro de masa, se rige por las ecuaciones de Euler.

Las ecuaciones de Euler se han venido expresando en dos marcos de referencia, que parecen dar lugar a dos puntos de vista diferentes en cuanto a su interpretación. En el primer punto de vista, [1] las ecuaciones están dadas para un sistema no rotante cuyos ejes coinciden instantáneamente con los ejes principales del cuerpo; en el segundo punto de vista, [2] se dice que las ecuaciones son válidas para un sistema fijo al cuerpo, el cual rota con él. Para entender bien el origen de esta discrepancia, deduciremos las ecuaciones de Euler en cada uno de aquellos sistemas.

A. Desde un sistema no-rotante ubicado en el centro de masa

Las ecuaciones de Newton para el movimiento rotacional toman la forma

$$\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}, \quad (1)$$

donde τ es la suma de los torques que actúan sobre el cuerpo, $\vec{L}$ es el momento angular del cuerpo y el punto arriba de este significa derivada temporal. Estos vectores en general deben estar expresados con respecto al origen de un sistema inercial. Sin embargo en particular pueden ser expresados con respecto un sistema no rotante con origen en el centro de masa del cuerpo. Lo anterior es posible puesto que las fuerzas inerciales que aparecen por la aceleración del centro de masa son equivalentes a una única fuerza cuya línea de acción pasa por el centro de masa y por tanto no ejerce torque con respecto a este punto.

En general el momento angular del cuerpo está dado por la suma de los momentos angulares de cada partícula que lo conforman,

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i, \quad (2)$$

donde $\vec{r}_i$ es la coordenada de la i -ésima partícula de masa m_i , con respecto al centro de masa. La velocidad de las partículas en este sistema se escribe como $\dot{\vec{r}}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$, donde $\vec{\omega}$ es la velocidad angular del cuerpo, que es la misma para cada punto sobre el cuerpo [3], por tanto el momento angular se puede escribir como

$$\vec{L} = \mathbf{I} \vec{\omega}, \quad (3)$$

donde,

$$\mathbf{I} \equiv - \sum_i m_i (\vec{r}_i \times)^2, \quad (4)$$

es el tensor momento de inercia. La expresión $\vec{r}_i \times$ corresponde a un tensor antisimétrico definido a través de la propiedad

$$(\vec{r}_i \times) \vec{\omega} \equiv \vec{r}_i \times \vec{\omega}. \quad (5)$$

El momento de inercia, visto desde un sistema no rotante, es una cantidad que varía con el tiempo, puesto que las coordenadas de las partículas, relativas al centro de masa, cambian continuamente mientras el cuerpo rota. por tanto la derivada del momento angular con respecto al tiempo tendrá contribuciones tanto de la variación de la velocidad angular como de la del momento de inercia. La derivada del momento de inercia se obtiene directamente de la definición (4) y de la identidad de Jacobi para el producto vectorial:

$$(\dot{\vec{r}}_i \times) = (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \times = (\vec{\omega} \times)(\vec{r}_i \times) - (\vec{r}_i \times)(\vec{\omega} \times)$$

para dar

$$\dot{\mathbf{I}} = (\vec{\omega} \times) \mathbf{I} - \mathbf{I} (\vec{\omega} \times) \equiv [(\vec{\omega} \times), \mathbf{I}].$$

En función del momento de inercia la ecuación de movimiento (1) se escribe

$$\vec{\tau} = \vec{\omega} \times \vec{L} + \mathbf{I} \dot{\vec{\omega}} \quad (6)$$

La ecuación (6) corresponde a las ecuaciones de Euler para el cuerpo rígido. En esta aproximación hemos considerado que el origen del sistema de coordenado está en el centro de masa del cuerpo y es no rotante, esto es, un sistema que aunque puede ser no inercial sus ejes coordenados son siempre paralelos a los de un sistema inercial.

B. Desde un sistema rotante

Cuando nos ubicamos en el centro de masa con un sistema no rotante, como vimos, las fuerzas inerciales que aparecen no realizan torque, de esta forma el análisis de las rotaciones alrededor del centro de masa es independiente de si este está acelerado o no. Sin embargo, cuando nos montamos en un sistema rotante, fijo al cuerpo, las fuerzas inerciales, debido a la rotación, pueden causar un torque neto.

Sea S un sistema inercial y S' un sistema cuyos ejes coordenados están rotados respecto a los de S , con los orígenes de coordenadas coincidentes en todo momento. Llamaremos vector, en relación a un sistema de referencia, al arreglo matricial de las proyecciones de una cantidad vectorial sobre los ejes coordenados de dicho sistema. De acuerdo a ello el vector $\vec{V}$ en el sistema inercial corresponde al $\vec{V}'$ del sistema rotado multiplicado por una matriz de rotación $\mathbf{R}$, simbólicamente escribimos

$$\vec{V} = \mathbf{R} \vec{V}' \quad (7)$$

Puesto que bajo una rotación las magnitudes y los ángulos entre vectores se preservan, $\mathbf{R}$ debe ser una matriz ortogonal, esto es, $\mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{1}$. Si la matriz de rotaciones depende del tiempo la derivada temporal del vector en el sistema inercial no corresponde a la rotación de la derivada del vector en el sistema rotado. Podemos definir una derivada temporal covariante D_t como la derivada temporal que aplicada a un vector rotado corresponde a la derivada ordinaria del vector en el sistema inercial, esto es un operador que cumple con la condición

$$\frac{d}{dt} \vec{V} = \mathbf{R} D_t \vec{V}'. \quad (8)$$

Lo cual se traduce que cuando la derivada covariante actúa sobre vectores se comporta como

$$D_t = \mathbf{R}^T \frac{d}{dt} \mathbf{R} = \frac{d}{dt} + \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} \equiv \frac{d}{dt} + \vec{\Omega} \times. \quad (9)$$

El último término de la expresión anterior es posible puesto que, por ser $\mathbf{R}$ ortogonal, el producto $\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}$ es

una matriz antisimétrica, la cual a su vez se puede representar en función de tres parámetros independientes que permiten definir un vector, $\vec{\Omega}$.

Para ver el significado físico de este vector consideremos una partícula en movimiento circular alrededor de un eje que atraviesa el origen y con velocidad angular $\vec{\omega}$. Denotando por $\vec{r}$ la posición de esta partícula en el sistema de referencia inercial, su velocidad se escribe $\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Si nos montamos en un sistema de referencia rotante, donde la partícula esté en reposo, el vector posición en este sistema, $\vec{r}' = \mathbf{R}^T \vec{r}$, tendrá derivada temporal nula $\dot{\vec{r}}' = 0$, por tanto, de acuerdo a (8) y (9), se tiene

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \mathbf{R}(\vec{\Omega} \times \vec{r}') = (\mathbf{R}\vec{\Omega}) \times (\vec{r}'), \quad (10)$$

donde hemos usado el hecho que el producto vectorial transforma como un vector bajo rotaciones. Como este análisis es independiente del valor de $\vec{r}$ llegamos finalmente a

$$\vec{\Omega} = \mathbf{R}^T \vec{\omega} \equiv \vec{\omega}'. \quad (11)$$

Lo cual quiere decir que el vector que aparece en la derivada covariante corresponde al vector velocidad angular instantánea de rotación del sistema S' , con respecto a un sistema inercial pero visto desde S' .

De acuerdo a lo anterior, la ecuación (1), para un sistema rotante con velocidad instantánea $\vec{\Omega}$, se puede escribir como

$$\vec{r}' = D_t \vec{L}' = \vec{\Omega} \times \vec{L}' + \dot{\vec{L}}'. \quad (12)$$

En particular, si el cuerpo está en reposo en el sistema rotante entonces el tensor de inercia $\mathbf{I}'$ es constante y $\vec{\Omega} = \vec{\omega}'$ con lo cual la ecuación anterior se puede escribir como

$$\vec{r}' = \vec{\omega}' \times \vec{L}' + \mathbf{I}' \dot{\vec{\omega}}', \quad (13)$$

que tiene exactamente la misma forma que (6), excepto que en este caso las cantidades están medidas desde el sistema rotante fijo al cuerpo.

C. Correspondencia de las dos interpretaciones

El análisis anterior quiere decir que ambas interpretaciones de las ecuaciones de Euler son correctas, esto es, la forma de las ecuaciones de Euler son exactamente las mismas, tanto en un sistema no-rotante como en un sistema rotante fijo con el cuerpo, con orígenes en el centro de masa.

Sin embargo aunque la forma de las ecuaciones es la misma ambos sistemas, la interpretación física, en cambio, que se hace de cada término, depende del sistema de referencia. Para darle una interpretación al término $\vec{\omega}' \times \vec{L}'$ en el sistema rotante reescribimos la ecuación (1) haciendo uso de (2) y la derivada covariante, de la siguiente forma

$$\vec{r}' = \sum_i m_i \vec{r}'_i \times D_t^2 \vec{r}'_i, \quad (14)$$

donde la derivada covariante segunda resulta ser

$$D_t^2 \vec{r}'_i = \ddot{\vec{r}}'_i + 2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}'_i + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}'_i) + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}'_i.$$

Si el sistema rota fijo al cuerpo entonces las partículas en ese sistema están inmóviles y se tiene $\dot{\vec{r}}'_i = 0$ y $\ddot{\vec{r}}'_i = 0$. La velocidad de rotación del sistema es en ese caso el vector velocidad angular del cuerpo en el sistema S' , por tanto (14) se expande como

$$\vec{r}' = \sum_i m_i \vec{r}'_i \times (\vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}'_i)) + \sum_i m_i \vec{r}'_i \times \dot{\vec{\omega}}' \times \vec{r}'_i. \quad (15)$$

Vemos que el primer sumando del lado derecho de la ecuación anterior es la suma de los torques generados por la fuerza centrífuga que experimenta cada partícula al estar el cuerpo en rotación. Usando la identidad de Jacobi para este término, concluimos que finalmente corresponde a $\vec{\omega}' \times \vec{L}'$. Así que, desde el punto de vista del sistema rotante, el momento de inercia no cambia, y el producto vectorial entre la velocidad angular y el momento angular proviene de las fuerzas inerciales que aparecen por estar en un sistema no inercial, mientras que desde el punto de vista del sistema no-rotante, ubicado en el centro de masa, este producto proviene sólo de la variación temporal del momento de inercia, y no de las fuerzas inerciales.

Finalmente, sintetizamos esta discusión de la siguiente manera: la expresión general, $\vec{r}' = D_t \vec{L}'$, en un sistema rotante con velocidad angular arbitraria, e instantánea, $\vec{\Omega}$, (omitiendo las primas), se escribe

$$\vec{r}' = \dot{\mathbf{I}}\vec{\omega} + \mathbf{I}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\Omega} \times \mathbf{I}\vec{\omega}.$$

En particular, para el sistema rotante el primer sumando del lado derecho se anula, en tanto que el tercer sumando es el responsable del producto vectorial entre la velocidad y el momento angulares. Para el sistema no-rotante la situación se invierte, el tercer sumando es quien se anula, mientras que el primero es el responsable de aquel producto. Esto queda resumido en la siguiente tabla

Sistema	valor de $\dot{\mathbf{I}}$	valor de $\vec{\Omega}$
No rotante	$[\vec{\omega} \times, \mathbf{I}]$	0
Rotante	0	$\vec{\omega}$

De acuerdo a la tabla anterior vemos que la ecuación de movimiento tiene exactamente la misma forma en estos dos sistemas, y son estos los dos únicos tipos de sistemas donde son válidas las ecuaciones de Euler, como las conocemos, en su forma no covariante.

En ciertas ocasiones, para cuerpos simétricos (con dos momentos de inercia principales iguales) en un campo

gravitacional, puede ser más conveniente escoger un tercer sistema, uno que esté rotando con solo uno de sus ejes rígidamente atado al cuerpo y coincidente con el eje principal (diferente a los que expresan los momentos de inercia iguales) del cuerpo, y con un segundo eje que esté siempre sobre el plano perpendicular al campo gravitacional. En ese caso, debido a la simetría del cuerpo se cumple que el tensor de inercia es constante $\dot{\mathbf{I}}' = 0$, sin embargo, ya la velocidad angular de rotación del sistema no coincide con el vector velocidad angular del cuerpo en el sistema rotante $\vec{\Omega} \neq \vec{\omega}'$, por tanto las ecuaciones del movimiento de rotación no presentan la forma de las ecuaciones de Euler estándar.

III. MOVIMIENTO DEL TROMPO

Entenderemos por trompo un objeto masivo con simetría axial que puede rotar alrededor de un punto fijo ubicado en su eje de simetría, en presencia de la gravedad. Debido a la simetría uno de los ejes principales coincidirá con el eje de simetría, que llamaremos principal, y los otros dos estarán en un plano perpendicular a ese eje que llamaremos secundarios. En general el punto fijo no coincide con el centro de masa del trompo por tanto al escribir las ecuaciones de Euler en el centro de masa el torque generado por la reacción en el punto fijo va depender de la dinámica del centro de masa. Lo mas conveniente es escribir las ecuaciones de Euler con respecto al punto fijo, en cuyo caso el torque de las fuerzas inerciales que aparecen actuando sobre el centro de masa se hacen corresponder exactamente a un incremento del momento inercia de los ejes secundarios, y por tanto las ecuaciones de Euler no cambian de forma. Ello constituye la esencia del teorema de Steiner.

A. Parametrizando las rotaciones

Para parametrizar de forma adecuada la posición del trompo en un instante de tiempo determinado la consideramos como una transformación de rotación desde la posición donde el eje de simetría es vertical. Debido a la ortogonalidad una matriz de rotaciones se puede escribir como el exponente de una matriz antisimétrica, por tanto una matriz de rotaciones (en tres dimensiones) tendrá la forma [6]

$$\mathbf{R}(\vec{\alpha}) = e^{\vec{\alpha} \times}, \quad (16)$$

donde la dirección de $\vec{\alpha}$ determina el eje de rotación y su magnitud el ángulo rotado. Haciendo la expansión del exponencial y considerando las propiedades del producto vectorial la matriz de rotaciones se puede escribir como

$$\mathbf{R} = \hat{u}\hat{u}^T + \sin \alpha (\hat{u} \times) - \cos \alpha (\hat{u} \times)^2, \quad (17)$$

con $\alpha \equiv |\vec{\alpha}|$ y $\hat{u} = \vec{\alpha}/\alpha$, de donde se puede obtener directamente,

$$\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} = \left(\dot{\alpha} \hat{u} - (1 - \cos \alpha) \hat{u} \times \dot{\hat{u}} + \sin \alpha \dot{\hat{u}} \right) \times. \quad (18)$$

La expresión entre paréntesis del lado derecho de (18) corresponde a la velocidad instantánea de la rotación. En el caso en que $\hat{u}$ sea constante la velocidad de rotación es $\vec{\Omega} = \dot{\vec{\alpha}}$, como era de esperarse. Sin embargo vemos que para rotaciones que van cambiando con el tiempo su eje de rotación la expresión de la velocidad angular se torna un poco obscura en su interpretación, en ese caso es más conveniente escribir la matriz de rotaciones como un producto de rotaciones elementales alrededor de los ejes coordenados, en dirección de los vectores unitarios $\hat{e}_i$ de la forma

$$\mathbf{R}(\theta \hat{e}_i) = e^{\theta \hat{e}_i \times}. \quad (19)$$

En la parametrización de Euler la matriz de rotaciones se escribe como el producto de tres rotaciones elementales dos sobre el eje $\hat{e}_3$, mediadas por otra sobre el eje $\hat{e}_1$ de la forma siguiente,

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\phi \hat{e}_3) \mathbf{R}(\theta \hat{e}_1) \mathbf{R}(\psi \hat{e}_3) \equiv \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3, \quad (20)$$

donde θ , ϕ y ψ son llamados los ángulos de Euler. Siempre es posible encontrar los parámetros $\vec{\alpha}$, de la rotación única $\exp(\vec{\alpha} \times)$ equivalente, en función de los ángulos de Euler. Parametrizando la dirección del eje de rotación de la rotación única como

$$\hat{u} = \cos \eta \sin \rho \hat{e}_1 + \sin \eta \sin \rho \hat{e}_2 + \cos \rho \hat{e}_3$$

y comparando las representaciones matriciales en ambas parametrizaciones se encuentra que los parámetros α , ρ y η en función de los ángulos de Euler se escriben como

$$\cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\phi + \psi}{2} \right), \quad (21)$$

$$\tan \rho = \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \csc \left(\frac{\phi + \psi}{2} \right), \quad (22)$$

$$\tan \eta = \tan \left(\frac{\phi - \psi}{2} \right). \quad (23)$$

Debido al carácter vectorial de $\vec{\omega}$ la transformación bajo rotaciones de la matriz $(\vec{\omega} \times)$ se puede escribir como

$$\mathbf{R}^T (\vec{\omega} \times) \mathbf{R} = (\mathbf{R}^T \vec{\omega}) \times = \vec{\omega}' \times. \quad (24)$$

Se tiene entonces, para el producto de la rotación inversa con su derivada de la matriz (20), la siguiente expresión en función de los ángulos de Euler

$$\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} = \left(\dot{\psi} \hat{e}_3 + \dot{\theta} (\mathbf{R}_3^{-1} \hat{e}_1) + \dot{\phi} (\mathbf{R}_3^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \hat{e}_3) \right) \times \quad (25)$$

La expresión entre parentesis del lado derecho corresponde a la velocidad instantánea de rotación en el sistema rotante. En forma explícita esa velocidad se escribe como

$$\vec{\omega}' = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix} \quad (26)$$

En la Figura 1 se da una representación gráfica de los ángulos de Euler, donde se puede determinar por inspección la velocidad $\vec{\omega}'$ en función de las velocidades angulares asociadas a estos ángulos dada en (26).

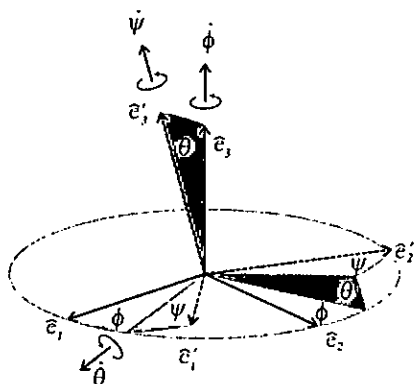


Figura 1: Ángulos de Euler con sus velocidades respectivas

B. Ecuaciones de movimiento del trompo

Tomando el sistema de referencia fijo al cuerpo (omitiendo las primas), con el origen en el punto fijo y sus ejes coordenados paralelos a los ejes principales del cuerpo, el tensor de inercia es diagonal y sus momentos de inercia principales I_i se ordenan de forma que los ejes secundarios sean los dos primeros y el principal el tercero, de acuerdo a ello $I_1 = I_2 \neq I_3$. El centro de masa se halla en el eje principal en dirección $\hat{e}_3$, a una distancia h del punto fijo. El campo gravitacional, vertical hacia abajo, va en la dirección $-\mathbf{R}^T \hat{e}_3$ desde el sistema fijo al el cuerpo. Por tanto el torque de la fuerza gravitacional, en el centro de masa viene dado por

$$\vec{\tau} = -h \hat{e}_3 \times mg \mathbf{R}^T \hat{e}_3 = \mu \sin \theta (\cos \psi \hat{e}_1 - \sin \psi \hat{e}_2) \quad (27)$$

donde $\mu \equiv mgh$ es el torque máximo.

En forma matricial las ecuaciones de Euler en el sistema de ejes principales se escriben

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} \quad (28)$$

desarrollando el producto vectorial y considerando la igualdad de los dos momentos principales secundarios se tienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \omega_2 \omega_3 (I_3 - I_1) + I_1 \dot{\omega}_1, \\ \tau_2 &= -\omega_1 \omega_3 (I_3 - I_1) + I_1 \dot{\omega}_2, \\ \tau_3 &= I_3 \dot{\omega}_3. \end{aligned} \quad (29)$$

Considerando que el torque con respecto al punto fijo es netamente de origen gravitacional (despreciando la fricción) entonces $\tau_3 = 0$ y la última de las ecuaciones anteriores implica que la velocidad angular en la dirección del eje principal, ω_3 , es constante. Sumando la primera ecuación en (29) con la segunda multiplicada por el número imaginario i , se obtiene la ecuación compleja

$$\tau = -i \omega \omega_3 (I_3 - I_1) + I_1 \dot{\omega} \quad (30)$$

donde $\tau \equiv \tau_1 + i \tau_2$ y $\omega \equiv \omega_1 + i \omega_2$. Con los valores de la velocidad y del torque en función de los ángulos de Euler dados en (26) y (27), se tiene para estas cantidades complejas

$$\tau = \mu \sin \theta e^{-i\psi}, \quad (31)$$

$$\omega = \Omega e^{-i\psi}. \quad (32)$$

con

$$\Omega \equiv (\dot{\theta} + i \dot{\phi} \sin \theta). \quad (33)$$

Introduciendo estos valores en (30) y factorizando el exponencial $e^{-i\psi}$ se consigue la ecuación diferencial

$$\mu \sin \theta = i \Omega (\dot{\phi} \cos \theta I_1 - L_3) + I_1 \dot{\Omega}, \quad (34)$$

donde $L_3 = I_3 \omega_3$ es el momento angular en la dirección del eje principal $\hat{e}_3$. Para hallar una ecuación en función de una sola variable compleja se propone

$$a = -i \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i\phi} \quad (35)$$

La variable a corresponde a la proyección de Riemman de un punto de la esfera en el plano, donde la parte real es la componente en la dirección $\hat{e}_1$ y la imaginaria en la dirección $\hat{e}_2$ (Ver figura 2). Derivando con respecto al tiempo la expresión anterior obtenemos

$$\dot{a} = a \Omega \csc \theta \quad (36)$$

lo que nos permite despejar a Ω y reemplazarlo en la ecuación (34) para dar

$$\mu a = I_1 \frac{\dot{a}^2}{a} (\cos \theta - 1) - i L_3 \dot{a} + I_1 \ddot{a} \quad (37)$$

donde en función de a la función coseno se puede escribir como

$$\cos \theta = \frac{1 - |a|^2}{1 + |a|^2} \quad (38)$$

La ecuación (37) con la condición L_3 constante es equivalente a las ecuaciones de Euler (29) para el trompo y es la ecuación diferencial del trompo para la variable compleja a . Esta ecuación es la generalización a ángulos mayores, de la ecuación del giróscopo dada en balística exterior para el caso de proyectiles donde el ángulo cenital θ es pequeño [4].

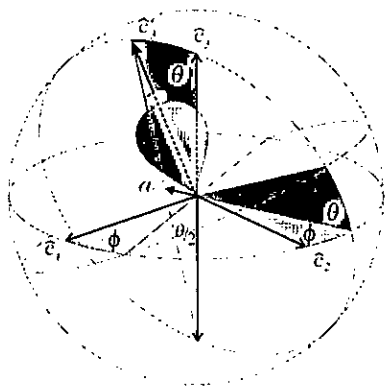


Figura 2: Variable a en función de los ángulos θ y ϕ

IV. SOLUCIONES A LA ECUACIÓN DEL TROMPO

La ecuación (37) es no lineal de segundo orden en a , de variable compleja no analítica. Todo esto insinúa que su solución exacta, para el problema general, se torna complicada. Sin embargo para ciertos casos particulares se puede hallar una solución exacta y, bajo ciertas aproximaciones, se logra proponer una solución aproximada que puede contrastarse con el experimento.

A. Precesión Uniforme

Físicamente se sabe que existe una solución donde el trompo precesa con ángulo cenital θ_0 fijo y velocidad azimutal $\dot{\phi}$ constante, esto corresponde al vector rotante

$$a(t) = -i \tan\left(\frac{\theta_0}{2}\right) e^{i\dot{\phi}t} \quad (39)$$

Los valores de $\dot{\phi}$ permitidos se consiguen introduciendo esta solución en la ecuación (37) para obtener la ecuación característica

$$I_1 \cos \theta_0 \dot{\phi}^2 - L_3 \dot{\phi} + \mu = 0. \quad (40)$$

Las raíces de esta ecuación son

$$\dot{\phi}_{\pm} = \frac{L_3 \pm \sqrt{L_3^2 - 4\mu I_1 \cos \theta_0}}{2I_1 \cos \theta_0} \equiv \alpha \pm \beta. \quad (41)$$

correspondientes a los casos de precesión rápida y lenta respectivamente.

En el caso de trompo rápido $L_3^2 \gg 4\mu I_1$, estas raíces toman los valores $\dot{\phi}_+ \approx L_3/(I_1 \cos \theta_0)$ para la precesión rápida y $\dot{\phi}_- \approx \mu/L_3$ para la lenta. En ese límite la precesión rápida es independiente del momento μ , podemos entonces asociarla con la precesión del cuerpo en ausencia de torques, ó con la nutación. En el mismo límite la segunda raíz es la expresión familiar de la precesión del trompo, cuando el punto fijo no coincide con el centro de masa, dada en cualquier texto de mecánica. Aunque la expresión exacta (41) para la frecuencia de precesión $\dot{\phi}_-$ no es tan familiar, se puede ver sin dificultad que es el resultado correcto, partiendo directamente de las ecuaciones de movimiento en la forma (12).

Para la precesión uniforme el momento angular rota con la velocidad angular de precesión, tomando entonces un sistema rotante alrededor del eje vertical con la velocidad de precesión el término $\dot{\vec{L}}$ en (12) se anula, quedando

$$\vec{\tau} = \vec{\dot{\phi}} \times \vec{L} \quad (42)$$

donde $\vec{\dot{\phi}}$ es la velocidad de precesión y el torque tiene por magnitud $\tau = \mu \sin \theta_0$. De acuerdo a lo anterior la magnitud de la velocidad de precesión es

$$\dot{\phi} = \frac{\mu \sin \theta_0}{L \sin(\theta_0 - \theta_L)} \quad (43)$$

donde θ_L es el ángulo entre el momento angular y el eje $\hat{e}_3$ del trompo.

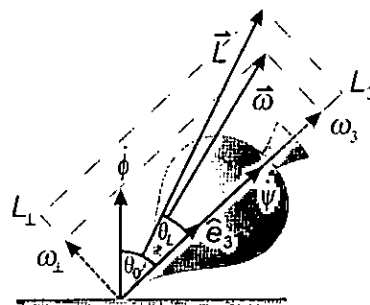


Figura 3: Plano cenital del Trompo

Este ángulo usualmente es pequeño (ó próximo a π) y para un trompo que gira rápidamente en primera aproximación es cero (ó π) y la velocidad de precesión es entonces $\dot{\phi} \approx \mu/L_3$. Sin embargo en general, (43) corresponde a

$$\dot{\phi} = \frac{\mu \sin \theta_0}{L_3 \sin \theta_0 - L_{\perp} \cos \theta_0} \quad (44)$$

donde hemos usado $L_3 = L \cos \theta_L$ y $L_\perp = L \sin \theta_L$. Considerando que la componente transversa del momento angular es $L_\perp = I_1 \omega_\perp$ y que la componente transversa de la velocidad angular proviene de la velocidad de precesión, de forma que $\omega_\perp = \dot{\phi} \sin \theta_0$, llegamos a la ecuación para la velocidad de precesión

$$\dot{\phi} = \frac{\mu}{L_3 - \dot{\phi} I_1 \cos \theta_0} \quad (45)$$

que equivale a la ecuación cuadrática en $\dot{\phi}$ dada en (40).

Se podría pensar que la solución más general es una combinación lineal de estas soluciones, con lo que podríamos asociar $\dot{\phi}_-$ con la velocidad angular de precesión y $\dot{\phi}_+$ con la de nutación, pero esto no es posible puesto que la ecuación es no lineal, y por tanto una combinación lineal de las soluciones ya no es solución.

B. Nutaciones de Pequeña Amplitud

En esta sección se hallará una solución mas general, aunque aproximada, a la ecuación del trompo (37) que la dada en la sección anterior. En función de la variable s definida como

$$s = \frac{\dot{\theta}}{\alpha}, \quad (46)$$

la ecuación diferencial (37) se puede reescribir como

$$I_1 \dot{s} = -I_1 s^2 \cos \theta + i \omega_3 I_3 s + \mu, \quad (47)$$

la cual corresponde a una ecuación no lineal de primer orden en s , que no es trivial por el hecho que la variable angular θ depende a su vez de la integral de s a través de

$$\theta(t) = 2 \arctan \left| e^{\int_{t_0}^t s dt} \right|. \quad (48)$$

Podemos allanar el problema reemplazando el valor de θ por un valor medio θ_0 considerando pequeñas oscilaciones, entonces la ecuación (47) se escribe

$$\dot{s} = -\cos \theta_0 (s - i \dot{\phi}_+)(s - i \dot{\phi}_-), \quad (49)$$

donde las raíces $\dot{\phi}_\pm$ están dadas en (41).

La ecuación diferencial (49) se resuelve separando variables e integrando por fracciones parciales para luego exponenciar con lo que se obtiene

$$s = i\alpha + \beta \cot x, \quad (50)$$

donde

$$x = \beta(\cos \theta_0)t + c, \quad (51)$$

con c una constante de integración en general compleja. La parte imaginaria de c es la cantidad relevante puesto que su parte real puede ser borrada con una traslación

temporal. Teniendo en cuenta que (46) el valor de a se obtiene tras integrar y exponenciar (50), para obtener

$$a = A e^{\int s dt} = A e^{i\alpha t} (\sin x)^{\sec \theta_0}, \quad (52)$$

donde A es una constante de integración. Salvo una constante, la función $\sin x$ exponenciada se comporta como

$$(\sin x)^{\sec \theta_0} \sim e^{-i\beta t} (1 - e^{2ix})^{\sec \theta_0}, \quad (53)$$

por tanto finalmente a se puede escribir como

$$a = a_p e^{i(\alpha - \beta)t} \left(1 - B e^{2i\beta(\cos \theta_0)t} \right)^{\sec \theta_0}, \quad (54)$$

donde a_1 y B son constantes arbitrarias. En el límite en que $B \rightarrow 0$ se tiene para a la solución de precesión lenta, en el caso en que $B \rightarrow \infty$ (con $a_1 B$ finito) se llega a la solución de precesión rápida. Experimentalmente la precesión es de menor frecuencia que la nutación, por lo tanto las solución para nutaciones de pequeñas amplitudes corresponde a (54) con $|B| \ll 1$. Haciendo la aproximación binomial del término entre parentesis en (54) se tiene

$$a = a_p e^{i\omega_p t} + a_n e^{i(\omega_n + \omega_p)t} \quad (55)$$

con $|a_n| \ll |a_p|$, donde las frecuencias ω_p y ω_n corresponden a las frecuencias de precesión y nutación del trompo, y están dadas por

$$\omega_p = \alpha - \beta = \dot{\phi}_-, \quad (56)$$

$$\omega_n = 2\beta \cos \theta_0 = (\dot{\phi}_+ - \dot{\phi}_-) \cos \theta_0 \quad (57)$$

En el límite $\theta_0 = \pi/2$ se obtiene $\omega_p = \mu/L_3$ y $\omega_n = L_3/I_1$. El valor de θ_0 está relacionado con las amplitudes a_n y a_p por la raíz del promedio temporal de $|a|^2$,

$$\tan \frac{\theta_0}{2} = \sqrt{a_p^2 + a_n^2} \quad (58)$$

La figura 4 es una representación gráfica de la solución dada en (55).

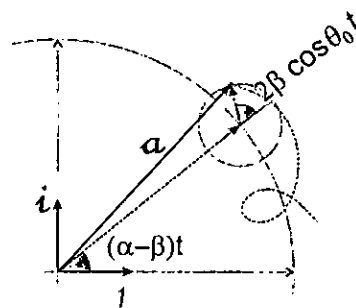


Figura 4: Representación gráfica de la solución

C. Modelando la fricción

Para dar cuenta de la fricción consideraremos, en primera aproximación, que el torque asociado depende linealmente de la velocidad angular, $\vec{\tau}^{(f)} = -\mathbf{C}\vec{\omega}$, donde $\mathbf{C}$ es en general un tensor de rango dos. Por la simetría del problema el sistema propio del tensor de coeficiente de fricción debe ser diagonal en el sistema de ejes propios del cuerpo,

$$\tau_i^{(f)} = -C_i \omega_i \quad (59)$$

de tal forma que los coeficientes asociados a los primeros dos ejes son iguales y, en principio mayores al del tercero: $C_1 = C_2 > C_3$.

De la tercera ecuación en (29), con el torque de fricción dado en (59), vemos que la rata de cambio de la velocidad angular ω_3 es negativa y proporcional a la misma velocidad, por tanto decae exponencialmente como

$$\omega_3(t) = e^{-\gamma t} \omega_3(0)$$

donde $\gamma = C_3/I_3$ es el inverso del tiempo de relajación para la velocidad angular ω_3 . En la aproximación adiabática donde el tiempo de relajación es muy pequeño con respecto al periodo de rotación, $C_3 \ll L_3$, podemos considerar que para tiempos cortos la velocidad angular en la dirección del eje del trompo es prácticamente constante, y la solución al movimiento es la misma que para el movimiento no amortiguado con la dependencia del momento angular con el tiempo $L_3(t) = e^{-\gamma t} L_3(0)$.

Adicional al efecto de frenado de la velocidad de rotación hemos de considerar el efecto Magnus, que consiste básicamente en la fuerza producida por una diferencia de presiones en la superficie de un cuerpo rotante cuando el cuerpo se traslada en un medio viscoso. Esta fuerza es proporcional al producto vectorial entre las velocidades de traslación y rotación. En el caso del trompo la velocidad angular esta principalmente dada por la componente en la dirección del eje principal, ω_3 , en tanto que la velocidad del centro de masa, con respecto al punto fijo, es proporcional a $\vec{\omega}_\perp \times \hat{e}_3$, por tanto la fuerza Magnus es proporcional a $\vec{\omega}_3 \times (\vec{\omega}_\perp \times \hat{e}_3)$. Suponiendo que la línea de acción de esta fuerza pasa por el eje del trompo torque de la fuerza Magnus se escribe

$$\vec{\tau}^{(m)} = D(\hat{e}_3 \times)^2 (\vec{\omega}_\perp \times \vec{\omega}_3) = D\vec{\omega}_3 \times \vec{\omega}_\perp \quad (60)$$

donde D es una cantidad positiva que tiene unidades de momento de inercia, que depende de la geometría del trompo y que en principio consideraremos constante. El torque complejo $\tau = \tau_1 + i\tau_2$, debido a la fricción transversa y al efecto Magnus se escribe

$$\tau = (iD\omega_3 - C_1)\omega. \quad (61)$$

Considerando las expresiones (32) se tiene la adición de estos torques al gravitacional (31), en la ecuación del giróscopo (37), se pueden llevar a cabo con el reemplazo

$$\mu \rightarrow \mu + (iD\omega_3 - C_1)\Omega \csc \theta$$

teniendo en cuenta (36), observamos que ese cambio es equivalente al reemplazo

$$L_3 \rightarrow L_3(1 + D/I_3) + iC_1$$

en (37). El coeficiente D , que da cuenta del efecto magnus, se puede interpretar como un aumento del momento de inercia con respecto al eje principal, debido al arrastre del aire alrededor del trompo. Por otro lado puesto que el valor de L_3 está involucrado en las frecuencias de nutación y precesión, el coeficiente C_1 , que puede ser interpretado como un momento angular imaginario, está relacionado con la amortiguación de las amplitudes de precesión y nutación. Considerando rotaciones rápidas $L_3 \gg C_1$ tenemos entonces que las magnitudes a_p y a_n , en (55), cambian aproximadamente como

$$a_p \rightarrow e^{\gamma_p t} a_p$$

$$a_n \rightarrow e^{-\gamma_n t} a_n$$

donde para rotaciones rápidas ($L_3^2 \gg \mu I_1$) $\gamma_p \approx \mu C_1/L_3^2$ y $\gamma_n \approx C_1/I_1$. Algo notable es que el signo de γ_p depende del de μ , por tanto la amplitud de la precesión crecerá en tanto μ sea positivo, y decrecerá si μ es negativo. También notamos que γ_p depende inversamente del momento angular L_3 por tanto la amplitud a_p se hace casi constante para grandes valores de este. Por otro lado la amplitud de la nutación es siempre decreciente y el tiempo de relajación $1/\gamma_n$ es prácticamente independiente de las condiciones cinemáticas del trompo. Puesto que $L_3^2 \gg \mu I_1$, entonces $\gamma_n \gg |\gamma_p|$, ello significa que para rotaciones rápidas la nutación se extingue mucho antes que la amplitud de la precesión cambie significativamente.

Dado que el momento angular L_3 está variando con el tiempo las frecuencias de precesión y nutación también lo están haciendo en forma aproximada como

$$\omega_p \rightarrow e^{\gamma t} \omega_p$$

$$\omega_n \rightarrow e^{-\gamma t} \omega_n$$

Finalmente, considerando la fricción el movimiento del trompo queda descrito aceptablemente como

$$a = a_p e^{\gamma_p t} e^{i\omega_p e^{\gamma t} t} + a_n e^{-\gamma_n t} e^{i(\omega_n e^{-\gamma t} + \omega_p e^{\gamma t})t} \quad (62)$$

V. MONTAJE EXPERIMENTAL

En esta sección mostraremos los resultados que se obtuvieron al experimentar con un giróscopo marca Pasco ME 8960. Este aparato consiste en un disco de 1.755 kg masa, con un radio de 12.7 cm y un grueso de 2.0 cm, el cual puede rotar alrededor de un eje con poca fricción que a su vez puede orientarse en cualquier dirección azimutal, en el rango de 40° a 130° con respecto al cenit.

El eje orientable posee un punto fijo a 12.7 cm del disco, que esta pivotado, a 30.7 cm del suelo sobre una barra vertical. La barra vertical está clavada en el centro de una base de fundición de hierro en forma de A, y puede rotar alrededor de su eje. En el otro extremo del eje orientable, opuesto al disco, se pueden colocar contrapesos para variar la ubicación del centro de masa.

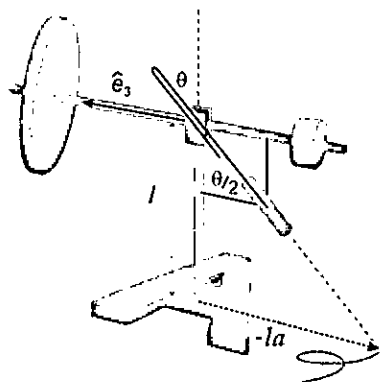


Figura 5: Giroscopio

Colocando un apuntador laser en la biceatriz del ángulo formado por el eje orientable del disco y la barra vertical es posible obtener una representación observable del vector a en el punto donde la luz laser choca con el suelo. El plano complejo en el cual se ubica el vector a corresponde al horizontal. Lo anterior se consiguió con una estructura simple de alambre galvanizado calibre 12 en forma de cuadrilátero equilátero, de ángulo variable, donde dos lados adyacentes coinciden con los ejes, vertical y orientable del giroscopio. El apuntador se colocó sobre la diagonal que biceca esos lados. Inicialmente se colocaron los contrapesos en el eje del disco de tal forma que el centro de masa quedara ubicado justo en el punto de pivote del eje orientable. Posteriormente se colocó un contrapeso de masa 151.48 gm en uno de los extremos del eje orientable. Se hicieron experimentos con el contrapeso adelante del disco a 21.0 cm del punto de pivote, y luego con el contrapeso atrás del disco a 34.5 cm del punto de pivote. El valor de la masa del contrapeso multiplicado por la distancia al punto de pivote y por el valor de la gravedad da cuenta efectiva del torque máximo μ al que es sometido el giroscopio. El disco se puso a rotar alrededor del eje orientable a distintas velocidades. Se tomaron fotos de la trayectoria del punto de luz en el piso con una cámara digital con control de tiempo de abertura. Para nuestro caso se hicieron exposiciones de 15 s y 30 s.

Las Figuras 6 y 8 muestran las fotos de dos situaciones diferentes del trazo laser en el movimiento del giroscopio con el contrapeso atrás y adelante respectivamente.

Las gráficas en las Figuras 7 y 9 muestran la solución (62) con valores de los parámetros a_n , a_p , γ , γ_p , γ_n , ω_n y ω_p , que se ajustan a las trayectorias mostradas en las fotos mostradas en las figuras 6 y 8.

En principio de las fotos es posible determinar con rel-



Figura 6: Trazo laser en el giroscopio con contrapeso atrás

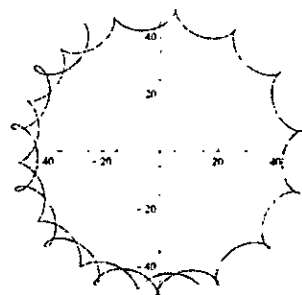


Figura 7: Ajuste de la ecuación del trompo de la foto dada en la Figura 6 con $a_p=48$, $a_n=6$, $\gamma_p=-0.005 \omega_p$, $\gamma_n=0.065 \omega_p$, $\gamma=0.0013 \omega_p$, $\omega_n=-14.9 \omega_p$ y $\omega_p=0.5983 \text{ s}^{-1}$.

ativa precisión las frecuencias de precesión y de nutación, los parámetros de amortiguamiento y el ángulo de inclinación del eje del disco. Sin embargo de los registros fotográficos no es posible determinar directamente la componente de la velocidad angular de rotación ω_3 . Para ello se puede hacer uso de un cronómetro controlado con foto puertas, que junto con las fotos se obtiene una información completa del movimiento del giroscopio.

VI. CONCLUSIONES

En la primera parte hemos mostrado la equivalencia de las formulaciones de la ecuación de Euler en los sistemas rotante y no rotante, aunque la expresión de la ecuación es idéntica la interpretación física difiere considerablemente. Escribimos la ecuación de Euler para el caso particular en que el cuerpo rígido posee dos valores iguales de momentos de inercia principales, y el cuerpo se mueve con un punto fijo ubicado en el tercer eje principal. La ecuación vectorial se redujo a una ecuación diferencial no lineal de una sola variable compleja. Se solucionó esta ecuación haciendo la aproximación de módulo constante. La solución hallada consistió en la suma de dos vectores rotantes en el plano complejo. El vector de mayor magnitud rota a velocidad angular menor y el menor longitud lo hace a una velocidad mayor. La velocidad de precesión corresponde a la velocidad de rotación del vector de mayor magnitud, en tanto que la velocidad



Figura 8: Trazo laser en el gir6scopo con contrapeso adelante

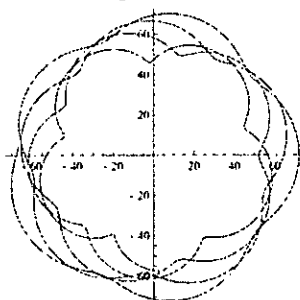
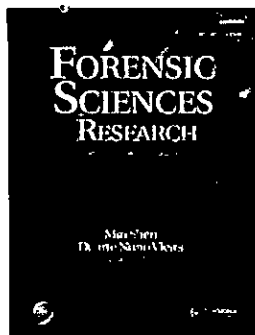


Figura 9: Ajuste de la ecuaci6n del trompo de la foto dada en la Figura 8 con $a_p=50.0$, $a_n=7.5$, $\gamma_p=0.012\omega_p$, $\gamma_n=0.02\omega_p$, $\gamma=0.00006$, $\omega_n=4.78\omega_p$ y $\omega_p=0.8928 \text{ s}^{-1}$.

de nutaci6n corresponde a la diferencia de la velocidades de los dos vectores. De forma aproximada se introdujo la fricci6n en el movimiento y se hall6 una soluci6n aceptable de movimiento real del trompo. La soluci6n se contrast6 con el experimento usando un gir6scopo comercial adaptandole un apuntador laser lo cual permite visualizar el movimiento del gir6scopo proyectado en el plano horizontal. Es posible visualizar la trayectoria del punto laser en el piso usando una c6mara fotogr6fica con tiempo de apertura controlable. De registros fotogr6ficos se puede determinar cantidades como las frecuencias de precesi6n y nutaci6n y el 6ngulo cenital. En conclusi6n el modelo coincide apreciablemente con el experimento en primera aproximaci6n, lo cual se puede apreciar en el buen ajuste de los par6metros de la soluci6n con las trayectorias trazadas por el punto laser.

-
- [1] An Introduction to Mechanics. David Kleppner & Robert J. Kolenkow. McGraw-Hill Book Co. (1978)
 - [2] Classical Mechanics, third edition, Herbert Goldstein, Charles Poole & John Safko, Addison Wesley (2002)
 - [3] Uniqueness of the angular velocity of a rigid body: Correction of two faulty proofs Nivaldo A. Lemos Am. J. Phys. 68, 668 (2000)
 - [4] Balística Exterior, Francisco Cucharelo Pérez. Ministerio de Defensa, Madrid (1992).
 - [5] Sobre el caso de Euler del movimiento de un cuerpo rígido, Eduardo Piña Garza, *Rev. Mex. Fis. E* (2) (2008) 92-103.
 - [6] The Lorentz Group a galilean aproach. D. E. Jaramillo and N. Vancgas. *Rev. Mex. Fis. E* 50 (2004) 41.



Experimental model for the description of the behaviour of a 9-mm projectile at a target

Patricia Morales-Vega, Daniel Esteban Jaramillo-Arango, Jaime Alberto Osorio-Velez & David Noreña-Blandón

To cite this article: Patricia Morales-Vega, Daniel Esteban Jaramillo-Arango, Jaime Alberto Osorio-Velez & David Noreña-Blandón (2020): Experimental model for the description of the behaviour of a 9-mm projectile at a target, Forensic Sciences Research, DOI: [10.1080/20961790.2019.1697078](https://doi.org/10.1080/20961790.2019.1697078)

To link to this article: <https://doi.org/10.1080/20961790.2019.1697078>



© 2020 The Author(s). Published by Taylor & Francis Group on behalf of the Academy of Forensic Science.



Published online: 09 Apr 2020.



Submit your article to this journal [↗](#)



Article views: 359



View related articles [↗](#)



View Crossmark data [↗](#)



Experimental model for the description of the behaviour of a 9-mm projectile at a target

Patricia Morales-Vega, Daniel Esteban Jaramillo-Arango, Jaime Alberto Osorio-Velez and David Noreña-Blandón

Instituto de Física, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia

ABSTRACT

Analysis of crime scenes involving single-fire-gun projectiles requires the determination of the direction of arrival of a projectile at the target and other factors to reconstruct events. The movement of a projectile can be analyzed by applying Euler's equations to a solid symmetrical rigid body. The present work starts from a Newtonian reformulation of these equations to show that, in the presence of a gravitational field, the system can be expressed with a complex variable nonlinear equation, where the inclusion of small nutation variables allows us to find possible solutions. As a particular case, we analyzed the movement of a 9-mm projectile fired from distances greater than 1 m to demonstrate that the direction of arrival of the projectile at the target cannot be traced by a stick placed in the target hole, as is usually performed in crime investigations. A series of shots were fired from distances varying between 1 m and 7 m. Impact data were recorded on Riemann planes of projection for the description of nutation and precession motions, allowing the observation of the motion dynamics of the projectile. We show that the direction of arrival at the target can be determined approximately from the analysis of the nutation and precession curves through Riemann planes of projection. The results presented in this work will allow more accurate judgements to be made in judicial investigations.

ARTICLE HISTORY

Received 17 March 2019
Accepted 28 August 2019

KEYWORDS

Forensic sciences; forensic ballistics; firearm; gyroscopic motion; Euler equations; nutation; precession; projectile motion

Introduction

It is a fundamental matter to determine the characteristics of shots fired in scenarios where firearms have been used. The correct determination of these characteristics allows a more accurate investigation that identifies a possible location from which shots have been fired and the firearm used. The estimation of the bullet trajectory traditionally starts by placing a fibreglass rod into the bullet hole of the target. Although this procedure is inaccurate, it is, at least, possible to infer geometrical parameters that can be used in rebuilding the kinematics (i.e. both trajectory and tumbling movement) of a projectile.

Euler equations or their Newtonian, Lagrangian and Hamiltonian reformulations are usually employed to describe the movement of a symmetric solid body, namely a bullet. Previous work [1] showed that in the presence of dissipative forces and a gravitational field, such equations can be reduced to a nonlinear equation over the components of the Riemann stereoscopic projection of the main vector on a plane tangent to the tip of the projectile in the direction of the gravitational field. Under the approximation of small-amplitude nutations, a

solution to the equation can be found and modified to include the movement of the projectile [1].

Projectile motion can be explained theoretically in an approximate way using the Lagrangian formulation of Newtonian mechanics. However, this explanation remains imprecise and incomplete. The projectile motion exhibits a more intuitive physical richness in that it is not limited to elliptical motion but also presents nutation and precession movements. Such motions of nutation and precession are not well described by less-elaborated formulations of mechanics. The study of such nutation and precession is important in that it allows us to describe the precise path followed by the projectile and the initial conditions of the shooting.

There are no reports of the described experimentation or quantification and qualification of ballistic elements for different-calibre projectiles because the experiments are expensive and difficult to process with the authorities. The police and army are the only parties allowed to possess high-calibre weapons and ammunition. It is thus difficult for a civilian or academic institution to conduct experiments even though experimental techniques will be easily reproducible if bureaucratic obstacles are overcome.

CONTACT Patricia Morales-Vega pmorales@fisica.udea.edu.co

Color versions of one or more of the figures in the article can be found online at www.tandfonline.com/tfsr.

© 2020 The Author(s). Published by Taylor & Francis Group on behalf of the Academy of Forensic Science.

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

The aim of the present work is to show that the gyroscopic motion of a bullet fired by a firearm directly shapes the figure of the target hole, contradicting conclusions that might be made about the trajectory on the basis of the aforementioned rod procedure. Therefore, another degree of freedom is added to the problem of the trajectory that must be resolved in subsequent investigations.

We compare the description of the motion of a commercial gyroscope that exhibits epicyclic movement with the same motion of a 9-mm bullet in flight and over Riemann planes of projection (RPPs). To this end, we examine the incidence of projectiles into targets using the data of experiments and ballistic tests. Such data reveal the nutation and precession movements, which are generally observed in computational simulations but not experimentally.

The present paper is arranged as follows. The second section presents the methodology implemented and describes the experiment and its theoretical framework. The third section summarizes our main findings. The fourth section discusses the results and presents conclusions.

Materials and methods

Euler equations are used to establish the relationship among the distance, direction of firing by the firearm and the projectile entrance footprint. This paper presents an experiment that, on the basis of the footprints of projectiles on RPPs, reveals that the initial firing conditions and the trajectory may not coincide with the projectile entry angles in the target for any firing distance.

Description of the experiment

Twenty-five sheets of straw cardboard were used as RPPs. The sheets had low impact resistance so to smoothly destabilize the projectile and produce a clear footprint. The RPPs each had an area of 17.5 cm by 25 cm and a thickness of 0.095 mm. The RPPs were placed at intervals of 25 cm. There was a sequence of 25 planes per round of firing. In this way, a clear bullet footprint was registered for each plane, allowing the extraction of all required information. The shooter was initially located 1 m from the first RPP in the sequence, and the distance between the shooter and the first RPP was then increased in intervals of 1 m to a final distance of 7 m.

Angles and longitudes were directly measured using digital calibrators for all footprints, giving the plane of incidence of the projectile or RPP. Figure 1 presents measurements of the size of the footprint made by the projectile and the angles that allow the determination of the quantities associated with precession and nutation from the projectile profile.

Equations of motion and parametrization for the projectile case

The complete motion of the projectile is determined by the forces and torques acting on the projectile (Figure 2). All these effects determine the conditions of motion of the projectile's centre of gravity.

Inside a gun, the advance of the projectile is guided by the bore of the barrel. The bore imprints a rotation motion on the projectile using several helical guiding fields with left and right inclinations. The bullet faces environmental perturbations when it leaves the barrel muzzle. The bullet continues to travel with an attack vector, resulting in an aerodynamic re-elevation phenomenon that vanishes inside the weapon. Such perturbations are due to the interactions of gases in the muzzle and the local atmospheric air over a short time interval, which is known as the ballistic wind phenomenon [2].

As the projectile travels through air, the motion of the centre of gravity is determined by Newton's second law (Equation (2.1)):

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_W + \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_M. \quad (2.1)$$

Air resistance generates forces and moments that act on the projectile and can be determined

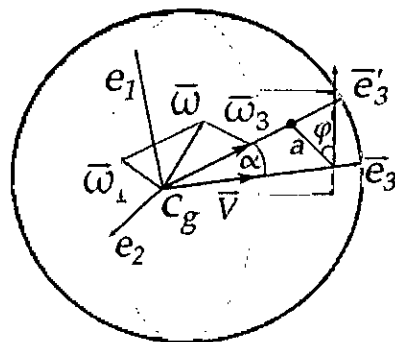


Figure 1. Vectorial diagram showing the attack vector and its relationship with angles and angular velocities.

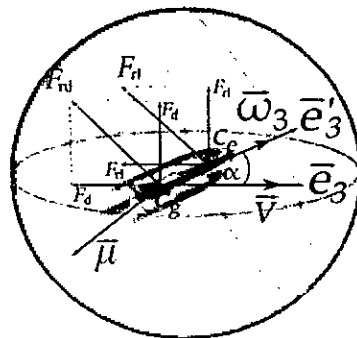


Figure 2. Diagram of the principal forces acting on a projectile. F_l is the lifting force, F_d is the aerodynamic friction, ω_3 is the rotational velocity component along the e'_3 axis, μ is the aerodynamic torque, and α is the angle of attack. C_g and C_l are the centres of gravity and lift, respectively.

experimentally using aerodynamic coefficients. These coefficients are not necessarily constant and can be expressed as complex polynomial functions, which in turn depend on the projectile attack angle and variables dependent on the Mach number (0.94 for 9-mm ammunition). Aerodynamic coefficients are usually evaluated in subsonic and supersonic tunnels depending on the case [3].

To better understand the characteristics of a flying projectile, additional concepts, such as those determining docility and stability, must be considered because these characteristics are what make each flying projectile unique [3].

The projectile stability depends on the rotation speed, which must be adjusted such that the effects of the medium, such as air and gravity, do not turn the direction of the tangent axis $\hat{e}'$ away from the trajectory. This is how damped gyroscopic motion is generated. Despite environmental interactions, the deviation of the tip of the projectile is negligible if the docility is small, which we can ensure. In such a case, the docility is due only to nutation and precession. The projectile is said to be stable if it does not turn under environmental effects. Docility is defined as

$$\delta r \frac{2g}{v} \sqrt{\frac{I_2 S_s}{\mu}}. \quad (2.2)$$

Attack vector and essential stability of the projectile

A projectile moving around its centre of mass has a rotational velocity $\vec{\omega}$ with two components, i.e. the rotational velocity around the principal rotation axis, $\vec{\omega}_3$, due to the projectile's own rotation and the transversal or perpendicular component that is in the plane formed by $\hat{e}_1$ and $\hat{e}_2$, denoted $\vec{\omega}_\perp = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ (Figure 1).

When a rigid body rotates around a principal inertial axis, the angular momentum $\vec{L}$ is parallel to the angular velocity $\vec{\omega}$ and is always directed along the rotation axis. For a symmetric rigid body with $I_1 = I_2$, the angular momentum can be written as the sum of longitudinal and transversal angular momenta:

$$\vec{L} = I_3 \vec{\omega}_3 + I_1 \vec{\omega}_\perp. \quad (2.3)$$

The projection plane is perpendicular to the $\vec{e}'_3$ axis while the principal axis $\vec{e}'_3$ of the projectile describes the motion of the projectile in the RPP. The attack vector, $\vec{a}$, is located on the RPP and corresponds to a vector radius that extends from the cut of the $\vec{e}_3$ axis with the RPP to the point of intersection of $\vec{e}_3$ with the same plane.

Starting with the Euler equation, it is possible to determine the exact solution in particular cases

under certain approximations. Here, the procedure is applied to the case of a projectile [4]:

$$\vec{\tau} = \dot{I} \vec{\omega} + I \dot{\vec{\omega}} + \vec{\Omega} \times I \vec{\omega}. \quad (2.4)$$

A differential is obtained using Equation (2.3) for small angles (i.e. $\cos \theta \approx 1$) and letting $a = Ae^{st}$ [1]:

$$I_2 \dot{a} - iL_3 \dot{a} - \mu a = 0. \quad (2.5)$$

The solution is

$$S_\pm = \frac{iL_3 \omega_3 \pm \sqrt{4I_2 \mu - I_3^2 \omega_3^2}}{2I_2}. \quad (2.6)$$

Two types of solution are obtained for the above equation in the case of a projectile.

- If the equation discriminant is positive, a complex solution for S with a positive real part and null imaginary part is obtained. This corresponds to a function that grows indefinitely with time. In conclusion, as the moment increases, the projectile rotates through π radian, resulting in the tip moving backwards and the base moving in the direction of motion. The motion thus becomes unstable.
- If the equation discriminant is negative, then two imaginary roots are obtained and the solution to Equation (2.5) becomes

$$S_\pm = ik(1 \pm d). \quad (2.7)$$

where

$$k = L_3/(2I_2) \text{ and } d = \sqrt{1 - 4\mu I_2/L_3^2}.$$

The more general solution to Equation (2.5) is

$$a = a_p e^{i(\omega_p t + \phi_p)} + a_n e^{i(\omega_n t + \phi_n)}, \quad (2.8)$$

where the first term represents a rotating vector having amplitude a_p and angle $\omega_p t + \phi_p$ that varies with time while it rotates around the centre of gravity with slow circular motion at what is called the precession angular velocity. The second term represents another rotating vector of amplitude a_n and angle $\omega_n t + \phi_n$, which is in the extreme of the a_p vector, with a faster twist, presenting a circular motion with what is called the nutation angular frequency. There is more than one lap of the second vector for each lap of the first vector. The vector obtained by summing the first and second vectors is therefore the attack vector $\vec{a}$, which rotates through an angle ϕ as shown in Figure 1. $\vec{a}$, therefore, determines the resulting motion of the projectile tip and the epicyclic trajectory on the RPP. The angle ϕ does not coincide with the precession angle, except when the nutation angle vanishes.

The solutions of ω_p and ω_n are complex solutions of the precession frequencies ω_p (Equation (2.9)) and nutation (Equation (2.10)), with the condition $\omega_p \rightarrow \omega_n - \omega_p$ where $\omega_p < \omega_n$. The equation of motion of the gyroscopic movement is thus given by Equation (2.5), for which the constants a_p and a_n correspond to complex numbers that are determined from the initial conditions

$$\omega_p = k(1-d), \quad (2.9)$$

$$\omega_n = k(1+d). \quad (2.10)$$

As a consequence, stability of the projectile demands that the discriminant of Equation (2.5) must be negative; i.e. $4I_2\mu - I_3^2\omega_3^2 < 0$ or equivalently

$$S_s = \frac{I_3^2}{4I_2\mu} > 1. \quad (2.11)$$

where S_s is referred to below as the gyroscopic stability coefficient. It is concluded from the above that the projectile is stable if $S_s = I_3^2\omega_3^2/(4I_2\mu)$. This is to say, a projectile is stable if its stability coefficient is greater than 1, as will be shown experimentally. As the projectile has gyroscopic motion, the precession and nutation motions can be calculated experimentally. Likewise, the value of the angle that corresponds to the rotating vectors, having amplitudes a_p and a_n , respectively given by Equations (2.9) and (2.10) for the limit $\theta_0 \rightarrow 0$. The geometric interpretation of the motion described by Equations (2.9) and (2.10) allows the plotting of the projectile tip motion (Figure 3). In the case of the projectile, epicyclic motion appears only with apices facing inwards. It is thus affirmed that the projectile tip describes a gyroscopic motion, represented by a flat curve in the RPPs (Figure 3), with apices facing inwards, tangent to a sphere that has as its origin at the projectile centre of gravity and a radius that is the distance from the centre of gravity to the tip. (The centre of gravity is located at one-third of the projectile longitude from the base of the projectile, as determined by the conical symmetry.)

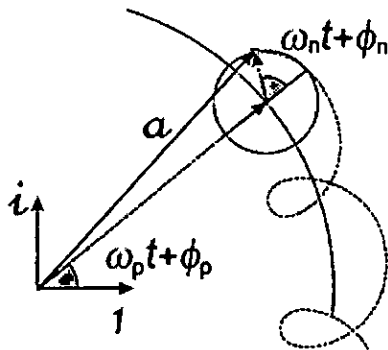


Figure 3. Graphical interpretation of the gyroscope solution.

Results

On the basis of previously developed theoretical models [1], we obtained a set of results in gyroscope and projectile experiments. In the case of a projectile that we are dealing with here, an experimental assembly is made for different parameters and different shooting distances, which are analyzed in the following manner.

- The angles of precession and nutation are plotted against the shooting distance in meters.
- Precession and nutation frequencies are determined from those plots.
- With information on ballistics taken from the literature, the projectile rotation frequency and aerodynamic coefficient are obtained for comparison of the theoretical torque with the experimental torque [2].
- The number of loops per lap, given by $N = \omega_n/\omega_p$, is calculated from the data in Table 1, which were experimentally obtained for the 9-mm projectile. This definition is fulfilled by both the gyroscope and projectile and the angular frequency between the fast and slow vectors. The time between two amplitude maxima is given by $P = 2\pi/\omega_n$, while the period for the slow vector is $P_1 = 2\pi/\omega_p$. From the experimental data, we calculate $N = 2d/(1-d)$ only for the projectile [3].

The stability coefficient given by Equation (2.11) allows the determination of the docility given by Equation (2.2). From the calculation of this parameter and using ballistic data obtained from the technical specifications of the gun and projectile and measurements of the RPPs, the value of d is estimated as $d = \sqrt{1 - 1/S_s}$. The determination of the precession angle θ yields $\omega = I_3\omega/(2I_2)$, $\mu = I_3^2\omega^2/(4I_2S_s)$. The step of the gun striation $n = 2\pi v_0/\omega$ according to Equation (2.4) (Figure 4).

To obtain the information needed to perform the calculations using the aforementioned equations, it is necessary to determine the attack angles of the footprints left by the projectile on the RPPs, the lengths of bullet holes, and the distance between

Table 1. Dynamic quantities calculated from measurements of the target.

Shooting distance (m)	S_s stability	ω_p (s^{-1})	ω_n (s^{-1})	P (s)	μ (Nm)
1	1.20	572.389	2940.798	0.0024	0.582
2	1.29	964.135	2635.205	0.0023	0.526
3	2.39	407.817	3191.523	0.0024	0.458
4	1.99	298.031	3301.309	0.0022	0.621
5	2.05	553.498	3045.842	0.0026	0.699
6	1.77	772.265	2827.075	0.0029	0.602
7	1.91	638.573	2960.767	0.0028	0.557

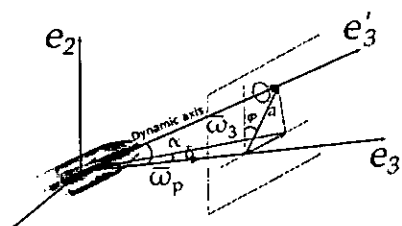


Figure 4. Dynamical axis of rotation and angles φ , α and δ for the 9-mm projectile in flight.

tangential points for different angles. With the data obtained for the footprint direction and longitude on the RPPs, the relationship between the longitude and direction is established to determine the curve with the profile of a real projectile and the separation of tangential points is measured for different angles as shown in Figure 5. With this information, we fit a curve to the data (Figure 6), where the variation in the projectile footprint with a variation in the attack angle is seen, resulting in the explicit relation expressed by Equation (3.1). The curve in the figure has a linear behaviour with the footprint data given in millimetres. The relation is

$$\alpha(L) = 8.34L - (81.97 \pm 0.01), \tag{3.1}$$

where L is the footprint length. The coefficient of determination for this case affirms that Equation (3.1) explains the variation in the nutation angle as a function of the footprint length in the RPP with a 99% level of confidence (Figures 5 and 6). Using Equation (3.1), the relation between the projectile footprint measured in the RPP and the shooting distance is analyzed below.

In Table 1, P is the period between two consecutive maxima while the torque μ is calculated with the stability coefficient and the factor d , whereas L_3 is calculated with ω_p (percentage error of 5%).

The magnitudes of the precession and nutation frequencies are adjusted to expected values with a coefficient of determination that on average has an 81% level of confidence, as shown by the aerodynamic results obtained from the general test and from the plots. The average value is obtained from the analysis of 150 targets studied.

The deviations for non-controlled situations in the quantitative analysis of the data recorded for the target footprints relative to expected or theoretical values are a consequence of environmental conditions, such as the wind effect, and the time between shots. This prevented the required stability of RPPs from being fully achieved. Nevertheless, it is possible to appreciate the damping of the projectile motion from the relation of the nutation angle against the shooting distance as shown in Figure 7.

To evaluate the results for the precession frequency and stability, we considered solutions (2.9) and (2.10) to the differential Equation (2.5) with

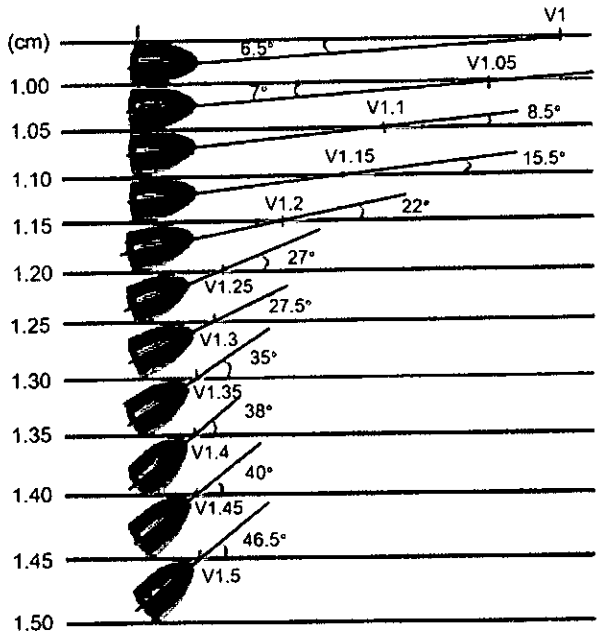


Figure 5. Graphical determination of the rotation angle α according to the tangent to the trajectory.

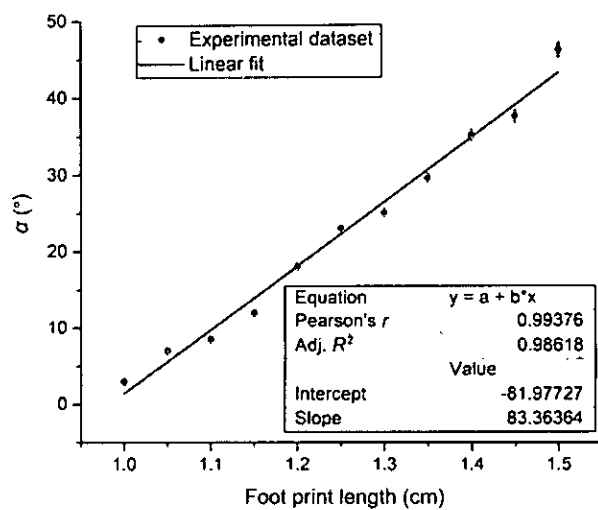


Figure 6. Nutation angle as a function of the footprint length in the target.

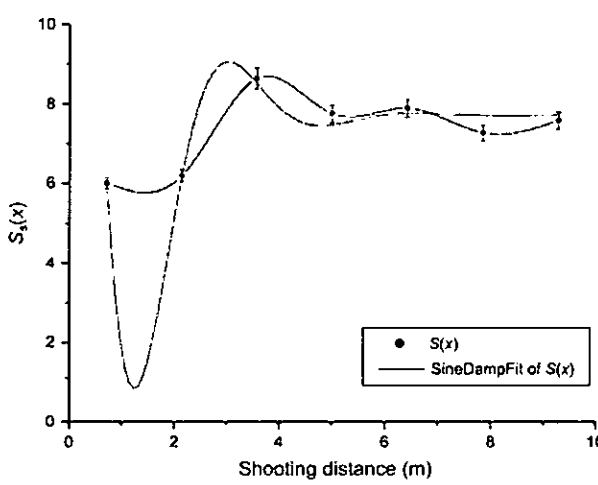


Figure 7. Stability factor as a function of the shooting distance (9-mm calibre ammunition).

parameter values fitted to the trajectory shown in Figure 7. From the fitting curve, the gyroscopic stability factor for the barrel muzzle is obtained as $S_s(x=0) = -4.07$ for the 9-mm calibre projectile with an 89% level of confidence. This result is an approximation of the dynamical stability under real conditions, as seen in Figure 7, where the stability factor is analyzed with respect to the shooting distance.

Further stability analysis is conducted for a distance ranging between 1 m and 7 m. The red curve in Figure 7 has a trend similar to the theoretical trend. Table 1 shows that the projectile is generally stable, with the stability coefficient fluctuating between 1.33 and 2.50, which is accepted for low-calibre ammunition [5].

It is appropriate at this point to comment on the experimental results relating to Table 1, where the calculated dynamical quantities are given. The stability factor fits the theoretical predictions, as the stability is greater than unity for subsonic projectiles; i.e. has values between 1.20 and 2.39. Moreover, Figure 7 shows that the factor S_s is proportional to the square of the rotational speed of the projectile, corresponding to the behaviour of a projectile stabilized by rotation due to striation of the weapon. This result agrees with theory that establishes that projectiles without fins are generally spin stable. However, the stability factor increases for low-calibre projectiles, explaining the jump of the curve in Figure 7. The results in Table 1 thus suggest that the stability factor has a certain level at 3 m and tends to oscillate with decreasing amplitude from this distance until it approaches a constant value with increasing distance, because there it is still a nutation frequency, which vanishes at a distance of approximately 200 m [3].

The following presents relations obtained in the experiments. First, experimental Equation (3.2) describes the relation of stability versus the shooting distance, where the values 1.99 and 2.13, respectively, correspond to values of x that determine the amplitudes of oscillation, showing that the curve fits the theoretical parameters [5] with an 89% level of confidence. It is worth clarifying that there is dynamical stability when $S_s > 1$ (theoretical value $S_s > 1.33$) while the graphical interpretation of the aerodynamic jump between 1.00 and 2.50 m suggests that this jump is due to the chaotic nature of the motion at the beginning of the trajectory (i.e. the ballistic wind). Therefore, from (3.2), with $x=0$, we obtain $S_s = -4.07$, which is in the expected range. After this event, the projectile recovers its sinusoidal motion around the centre of mass and must continue tangent to the trajectory.

The relation of stability versus the shooting distance is

$$S(x) = 1.96 + 57.44e^{-x/0.69} \sin \left[\pi \left(\frac{x-2.08}{1.1} \right) \right] \quad (3.2)$$

Second, Figure 8 presents the adjusted curves for the precession and nutation frequencies as functions of the shooting distance. These angular motions confirm that the centre of mass tends to follow the precession and nutation movements that the projectile tip describes, as seen in Figure 1. The precession reaches a minimum when the nutation reaches a maximum and vice versa as the shooting distance with respect to the RPP varies. It is considered for this experiment that the tip of the flying projectile is in a state of low nutation that approximates it in a small ϕ to the horizontal plane. The relations of the angular frequencies of nutation and precession with the shooting distance in Figure 8 are respectively,

$$\omega_n = 3045.693 + 303.244 \sin \left[\pi \left(\frac{x-1.452}{2.152} \right) \right] \quad (3.3)$$

$$\omega_p = 546.022 + 300.652 \sin \left[\pi \left(\frac{x-0.816}{2.103} \right) \right] \quad (3.4)$$

A value of 3037.38 s^{-1} is read for the angular frequency of nutation in contrast with the value of 554.27 s^{-1} for precession. The adjusted value for the nutation frequency is 3054.01 s^{-1} , in contrast with a value of 537.77 s^{-1} for the precession frequency with an 81% level of confidence. These results show clearly that the slow circular motion corresponds to the angular frequency of precession and the fast circular motion corresponds to the angular frequency of nutation as is predicted by theory [5]. Additionally, Figure 8 shows a dependence of these frequencies on the shooting distance due to stability.

Third, Figure 9 and Table 1 show that the oscillation period of the projectile remains between 0.0022 and 0.0029 s as the shooting distance varies. The periods for shooting distances between 1 and 3 m

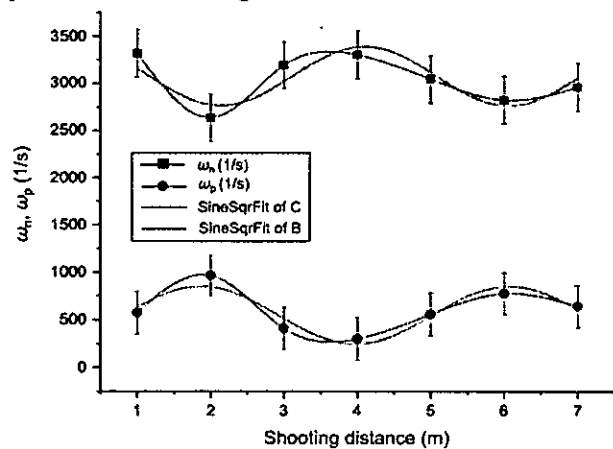


Figure 8. Nutation frequency (upper series) and precession frequency (lower series) as functions of the shooting distance.

are between 0.0024 and 0.0023 s, indicating that the period is at an average amplitude of the curve and therefore showing stability. After 4 m, the curve destabilizes, suggesting that external factors affect the experimental results. The relation between the oscillation period and shooting distance is

$$P(x) = 0.0023 + 6.3340\sin^2\left[\pi\left(\frac{x-2.6600}{8.8190}\right)\right] \quad (3.5)$$

The oscillation period has a minimum value of 0.00225 s and a maximum value of 0.00234 s, with a 70% level of confidence according to the fitting curve.

Finally, the relationship found between the moment and shooting distance is shown in Figure 10. The proposed model expressed by Equation (3.6) explains with a 68% level of confidence the variation in the torque as a function of the shooting distance. The experimental fitted value for the moment is 0.497 Nm, which is comparable to the theoretical value of 0.473 Nm [2]. The model thus explains the theoretical and experimental behaviours with an error of 5.07% approximately. The proposed model is

$$\mu(x) = 0.484 + 0.196\sin^2\left[\pi\left(\frac{x-2.470}{5.374}\right)\right] \quad (3.6)$$

It is interesting to examine the experimental results of the torque–stability relationship, highlighting that the variables are counterposed and that the projectile is docile. S_x is, therefore, the solution to differential Equation (2.5). We thus confirm the exterior ballistics theorem [3] and the validity of the experiment.

Conclusion

Through Riemann projection, the vector Euler equation was reduced to a nonlinear differential equation of a single complex variable. This equation was solved implementing the constant module approximation [1]. The obtained solution is the sum of two vectors rotating on a complex plane. The vector having the greatest magnitude rotates at lower angular velocity while the shorter vector rotates at higher angular velocity. The speed of precession corresponds to the speed of rotation of the vector of greater magnitude, while the speed of nutation corresponds to the difference in speed between the two vectors.

Analysis of the results of experiments designed for a projectile revealed that, on the basis of the theory and experimental data obtained from the projectile's footprint at the RPP (e.g. the length and shape), for distances greater than 1 m, the same obliquity characteristics are found regardless of the distance or direction of the shot.

Analysis of the curves of the frequencies of nutation and precession described the arrival of the projectile at the target and determined the trajectory through the target, whether it be ascending, descending, or level, as shown in Figure 8. The proposed methodology contrasts with methods used commonly in certain areas; i.e. judicial procedures that conclude the origin of the shot from the direction provided by the contusion are *a priori* results.

Physical and mathematical descriptions of the projectile movement, in general terms, present certain difficulties, because motion descriptions correspond to complex differential equations whose solution is determined by environmental conditions. The simplified solution of these equations depends on gyroscopic movement, the phenomenon of drift and re-elevation.

The nutation angle and precession in RPPs were measured to quantify the gyroscopic stability in the aerodynamic model of a 9-mm calibre projectile. Experimental data were plotted with respect to the shooting distance, with coefficients of determination

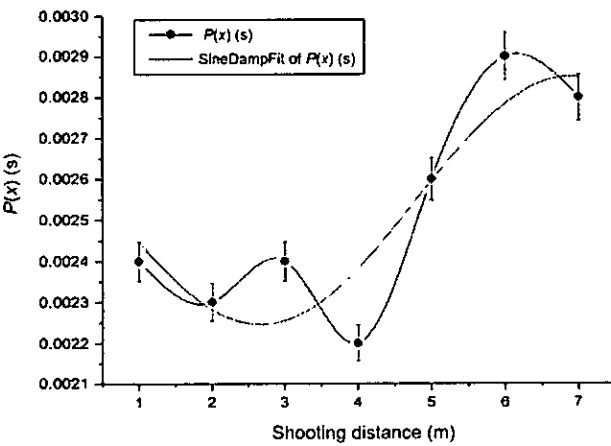


Figure 9. Oscillation period as a function of the shooting distance.

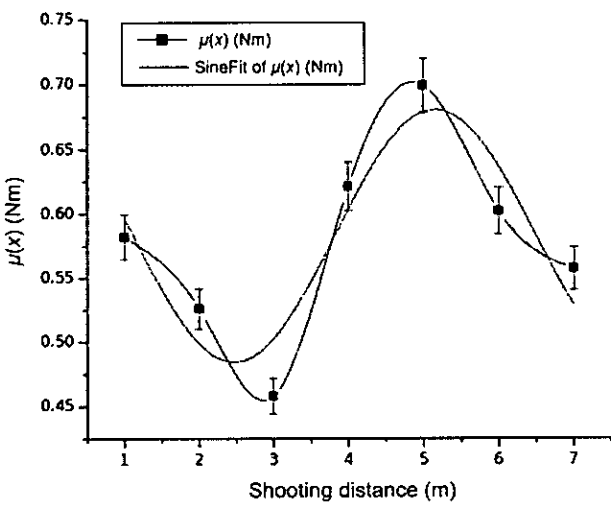


Figure 10. Torque as a function of the shooting distance.

ranging between 0.68 and 0.87. These values indicate the explanatory capacity of the fit corresponding to Equation (3.2) and characterize a projectile at a target.

The experimental data and the calculations made for the 9-mm calibre projectile reveal that the number of rotations per nutation cycle is a linear function of the ratio between the precession and nutation velocities and the average angle of inclination of the projectile axis. This finding agrees with the literature on external ballistics and the results of previous work [1].

When single-projectile impacts are presented, it is necessary to determine the direction of arrival and other possible factors to reconstruct events for the purposes of judicial investigation. The nutation and precession movements are not observable empirically from the projectile footprint *because* these movements cannot be registered using high-speed cameras or computer software. The analysis conducted in this work is applicable to the relation of the shooting distance versus the Euler angle.

Meanwhile, evidence relating to the contusion line, the distribution of embedded powder grains and black smoke are criteria only used for detonations made at close distance. At larger distances, the direction of entry into the target is determined by the shape that suggests the obliquity of the entrance of the projectile to the surface of impact. These criteria must be re-evaluated because distances greater than 1 m have the same characteristics of obliquity in the contusion because the phenomena of nutation and precession generate the same shapes of entry in the target for different distances and directions (Figure 8).

Acknowledgements

The authors gratefully acknowledge Ejercito Nacional de Colombia for organizing the weapon, ammunition, space, and professional shooter in the experiments described in this work.

Authors' contributions

Patricia Morales-Vega and Daniel Esteban Jaramillo-Arango conceived the presented idea, developed the theory and performed the experiments. Jaime Alberto Osorio-Velez designed some of the experimental strategies. David Noreña-Blandón verified the analytical methods. Patricia Morales-Vega and David Noreña-Blandón prepared the manuscript.

Compliance with ethical standards

This article does not contain any studies involving humans or animals performed by any of the authors.

Disclosure statement

No potential conflict of interest is reported by the authors.

References

- [1] Morales P, Jaramillo DE. Experimental aspects of the gyroscope movement. *Rev Mexi Fis*. 2016;62: 44–50.
- [2] Sellier K, Kneubuehl B. Wound ballistics and the scientific background. D-53111. Amsterdam (Netherlands): Elsevier; 1994.
- [3] Cucharelo FP. *Balística exterior*. Madrid (Spain): Ministerio de Defensa; 1994.
- [4] Goldstein H, Poole C, Safko J. *Classical mechanics*. 3rd ed. Boston (MA): Addison-Wesley; 2002. p. 184–188.
- [5] McCoy RL. *Modern exterior ballistics*. Atglen (PA): Schiffer; 1999.

660

SEÑOR
JUEZ QUINTO CIVIL DEL CIRCUITO
MEDELLÍN - ANTIOQUIA
DR. RAFAEL ANTONIO MATOS RODELO
LA CIUDAD

Ref.: VERBAL
Dte.: Jesús Azael Hernández Bravo y Otros.
Ddos.: Envía Colvanes S.A.S. y Otros.
Rad.: 2019 - 0001
Asunto: Contestación a requerimiento.

PATRICIA de JESUS MORALES VEGA, actuando en mi calidad de Perito en el proceso del radicado, y estando en el tiempo oportuno, de la manera más respetuosa me dirijo a su despacho, con el fin de darle trámite al requerimiento solicitado mediante auto del 03 de Agosto del 2020 y notificado el 05 de Agosto de 2020, y en especial lo ordenado de conformidad al Artículo 226 del C.G. del Proceso, así:

DATOS GENERALES DEL PERITO.

Nombre: PATRICIA DE JESÚS MORALES VEGA.
Cédula de ciudadanía: 42'962.834
Dirección: Carrera 43 N° 57-16 201. Medellín.
Correo electrónico: patricia.morales@udea.edu.co
Teléfono: 2545974. Cel.: 3122878147.
Profesión: Física Pura de la Universidad de Antioquia.
Títulos Profesionales: Física Pura; Doctora en física; Especialista en Ciencias Forenses y Balística; y Magister en Ciencia Física. (Se anexan los respectivos títulos).

No obstante, lo anterior, en el Dictamen rendido a solicitud de la parte actora, aparecen los títulos de idoneidad, y en la respectiva audiencia de ratificación y sustentación del dictamen, se expresará bajo la gravedad de juramento los requerimientos que el despacho considere pertinentes y conducentes de acuerdo con el Artículo 226 del C.G. del Proceso.

Igualmente se anexan publicaciones realizadas por la perita, la cual también no ha sido sancionada o estar en curso cualquier proceso disciplinario, al igual que no ha obrado en proceso alguno con el Demandante.

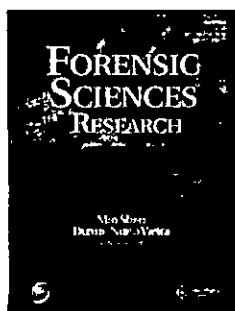
De igual manera la perito no se encuentra inmersa en las causales del artículo 50. Exclusión de la lista de Auxiliares de la Justicia.

En cuanto los métodos y experimentos realizados son cálculos matemáticos sobre planos cartesianos producto de la intelectualidad del perito y lo expresa en el dictamen rendido, junto con las bibliografías pertinentes. (Ver anexo del peritaje).

Atentamente.

Patricia Morales Vega P.
PATRICIA DE JESÚS MORALES VEGA.
C.C 42'962.834

661



Experimental model for the description of the behaviour of a 9-mm projectile at a target

Patricia Morales-Vega, Daniel Esteban Jaramillo-Arango, Jaime Alberto Osorio-Velez & David Noreña-Blandón

To cite this article: Patricia Morales-Vega, Daniel Esteban Jaramillo-Arango, Jaime Alberto Osorio-Velez & David Noreña-Blandón (2020): Experimental model for the description of the behaviour of a 9-mm projectile at a target, Forensic Sciences Research, DOI: [10.1080/20961790.2019.1697078](https://doi.org/10.1080/20961790.2019.1697078)

To link to this article: <https://doi.org/10.1080/20961790.2019.1697078>



© 2020 The Author(s). Published by Taylor & Francis Group on behalf of the Academy of Forensic Science.



Published online: 09 Apr 2020.



Submit your article to this journal [↗](#)



Article views: 359



View related articles [↗](#)



View Crossmark data [↗](#)



Experimental model for the description of the behaviour of a 9-mm projectile at a target

Patricia Morales-Vega, Daniel Esteban Jaramillo-Arango, Jaime Alberto Osorio-Velez and David Noreña-Blandón

Instituto de Física, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia

ABSTRACT

Analysis of crime scenes involving single-fire-gun projectiles requires the determination of the direction of arrival of a projectile at the target and other factors to reconstruct events. The movement of a projectile can be analyzed by applying Euler's equations to a solid symmetrical rigid body. The present work starts from a Newtonian reformulation of these equations to show that, in the presence of a gravitational field, the system can be expressed with a complex variable nonlinear equation, where the inclusion of small nutation variables allows us to find possible solutions. As a particular case, we analyzed the movement of a 9-mm projectile fired from distances greater than 1 m to demonstrate that the direction of arrival of the projectile at the target cannot be traced by a stick placed in the target hole, as is usually performed in crime investigations. A series of shots were fired from distances varying between 1 m and 7 m. Impact data were recorded on Riemann planes of projection for the description of nutation and precession motions, allowing the observation of the motion dynamics of the projectile. We show that the direction of arrival at the target can be determined approximately from the analysis of the nutation and precession curves through Riemann planes of projection. The results presented in this work will allow more accurate judgements to be made in judicial investigations.

ARTICLE HISTORY

Received 17 March 2019
Accepted 28 August 2019

KEYWORDS

Forensic sciences; forensic ballistics; firearm; gyroscopic motion; Euler equations; nutation; precession; projectile motion

Introduction

It is a fundamental matter to determine the characteristics of shots fired in scenarios where firearms have been used. The correct determination of these characteristics allows a more accurate investigation that identifies a possible location from which shots have been fired and the firearm used. The estimation of the bullet trajectory traditionally starts by placing a fibreglass rod into the bullet hole of the target. Although this procedure is inaccurate, it is, at least, possible to infer geometrical parameters that can be used in rebuilding the kinematics (i.e. both trajectory and tumbling movement) of a projectile.

Euler equations or their Newtonian, Lagrangian and Hamiltonian reformulations are usually employed to describe the movement of a symmetric solid body, namely a bullet. Previous work [1] showed that in the presence of dissipative forces and a gravitational field, such equations can be reduced to a nonlinear equation over the components of the Riemann stereoscopic projection of the main vector on a plane tangent to the tip of the projectile in the direction of the gravitational field. Under the approximation of small-amplitude nutations, a

solution to the equation can be found and modified to include the movement of the projectile [1].

Projectile motion can be explained theoretically in an approximate way using the Lagrangian formulation of Newtonian mechanics. However, this explanation remains imprecise and incomplete. The projectile motion exhibits a more intuitive physical richness in that it is not limited to elliptical motion but also presents nutation and precession movements. Such motions of nutation and precession are not well described by less-elaborated formulations of mechanics. The study of such nutation and precession is important in that it allows us to describe the precise path followed by the projectile and the initial conditions of the shooting.

There are no reports of the described experimentation or quantification and qualification of ballistic elements for different-calibre projectiles because the experiments are expensive and difficult to process with the authorities. The police and army are the only parties allowed to possess high-calibre weapons and ammunition. It is thus difficult for a civilian or academic institution to conduct experiments even though experimental techniques will be easily reproducible if bureaucratic obstacles are overcome.

The aim of the present work is to show that the gyroscopic motion of a bullet fired by a firearm directly shapes the figure of the target hole, contradicting conclusions that might be made about the trajectory on the basis of the aforementioned rod procedure. Therefore, another degree of freedom is added to the problem of the trajectory that must be resolved in subsequent investigations.

We compare the description of the motion of a commercial gyroscope that exhibits epicyclic movement with the same motion of a 9-mm bullet in flight and over Riemann planes of projection (RPPs). To this end, we examine the incidence of projectiles into targets using the data of experiments and ballistic tests. Such data reveal the nutation and precession movements, which are generally observed in computational simulations but not experimentally.

The present paper is arranged as follows. The second section presents the methodology implemented and describes the experiment and its theoretical framework. The third section summarizes our main findings. The fourth section discusses the results and presents conclusions.

Materials and methods

Euler equations are used to establish the relationship among the distance, direction of firing by the firearm and the projectile entrance footprint. This paper presents an experiment that, on the basis of the footprints of projectiles on RPPs, reveals that the initial firing conditions and the trajectory may not coincide with the projectile entry angles in the target for any firing distance.

Description of the experiment

Twenty-five sheets of straw cardboard were used as RPPs. The sheets had low impact resistance so to smoothly destabilize the projectile and produce a clear footprint. The RPPs each had an area of 17.5 cm by 25 cm and a thickness of 0.095 mm. The RPPs were placed at intervals of 25 cm. There was a sequence of 25 planes per round of firing. In this way, a clear bullet footprint was registered for each plane, allowing the extraction of all required information. The shooter was initially located 1 m from the first RPP in the sequence, and the distance between the shooter and the first RPP was then increased in intervals of 1 m to a final distance of 7 m.

Angles and longitudes were directly measured using digital calibrators for all footprints, giving the plane of incidence of the projectile or RPP. Figure 1 presents measurements of the size of the footprint made by the projectile and the angles that allow the determination of the quantities associated with precession and nutation from the projectile profile.

Equations of motion and parametrization for the projectile case

The complete motion of the projectile is determined by the forces and torques acting on the projectile (Figure 2). All these effects determine the conditions of motion of the projectile's centre of gravity.

Inside a gun, the advance of the projectile is guided by the bore of the barrel. The bore imprints a rotation motion on the projectile using several helical guiding fields with left and right inclinations. The bullet faces environmental perturbations when it leaves the barrel muzzle. The bullet continues to travel with an attack vector, resulting in an aerodynamic re-elevation phenomenon that vanishes inside the weapon. Such perturbations are due to the interactions of gases in the muzzle and the local atmospheric air over a short time interval, which is known as the ballistic wind phenomenon [2].

As the projectile travels through air, the motion of the centre of gravity is determined by Newton's second law (Equation (2.1)):

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_W + \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_M. \quad (2.1)$$

Air resistance generates forces and moments that act on the projectile and can be determined

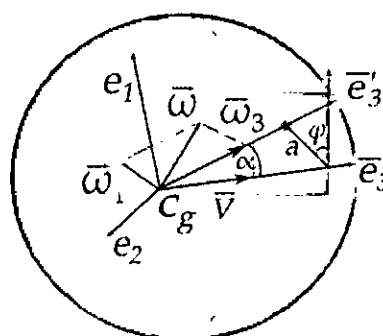


Figure 1. Vectorial diagram showing the attack vector and its relationship with angles and angular velocities.

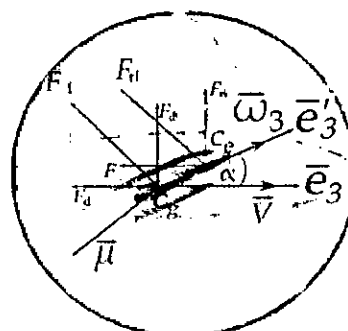


Figure 2. Diagram of the principal forces acting on a projectile. F_l is the lifting force, F_d is the aerodynamic friction, ω_3 is the rotational velocity component along the e_3 axis, μ is the aerodynamic torque, and α is the angle of attack. C_g and C_e are the centres of gravity and lift, respectively.

experimentally using aerodynamic coefficients. These coefficients are not necessarily constant and can be expressed as complex polynomial functions, which in turn depend on the projectile attack angle and variables dependent on the Mach number (0.94 for 9-mm ammunition). Aerodynamic coefficients are usually evaluated in subsonic and supersonic tunnels depending on the case [3].

To better understand the characteristics of a flying projectile, additional concepts, such as those determining docility and stability, must be considered because these characteristics are what make each flying projectile unique [3].

The projectile stability depends on the rotation speed, which must be adjusted such that the effects of the medium, such as air and gravity, do not turn the direction of the tangent axis $\hat{e}'$ away from the trajectory. This is how damped gyroscopic motion is generated. Despite environmental interactions, the deviation of the tip of the projectile is negligible if the docility is small, which we can ensure. In such a case, the docility is due only to nutation and precession. The projectile is said to be stable if it does not turn under environmental effects. Docility is defined as

$$\delta r \frac{2g}{v} \sqrt{\frac{I_2 S_s}{\mu}}. \quad (2.2)$$

Attack vector and essential stability of the projectile

A projectile moving around its centre of mass has a rotational velocity $\vec{\omega}$ with two components, i.e. the rotational velocity around the principal rotation axis, $\vec{\omega}_3$, due to the projectile's own rotation and the transversal or perpendicular component that is in the plane formed by $\hat{e}_1$ and $\hat{e}_2$, denoted $\vec{\omega}_\perp = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ (Figure 1).

When a rigid body rotates around a principal inertial axis, the angular momentum $\vec{L}$ is parallel to the angular velocity $\vec{\omega}$ and is always directed along the rotation axis. For a symmetric rigid body with $I_1 = I_2$, the angular momentum can be written as the sum of longitudinal and transversal angular momenta:

$$\vec{L} = I_3 \vec{\omega}_3 + I_1 \vec{\omega}_\perp. \quad (2.3)$$

The projection plane is perpendicular to the $\vec{e}_3$ axis while the principal axis $\vec{e}_3$ of the projectile describes the motion of the projectile in the RPP. The attack vector, $\vec{a}$, is located on the RPP and corresponds to a vector radius that extends from the cut of the $\vec{e}_3$ axis with the RPP to the point of intersection of $\vec{e}_3$ with the same plane.

Starting with the Euler equation, it is possible to determine the exact solution in particular cases

under certain approximations. Here, the procedure is applied to the case of a projectile [4]:

$$\vec{\tau} = I \dot{\vec{\omega}} + \vec{\Omega} \times I \vec{\omega}. \quad (2.4)$$

A differential is obtained using Equation (2.3) for small angles (i.e. $\cos \theta \approx 1$) and letting $a = Ae^{st}$ [1]:

$$I_2 \dot{a} - iL_3 \dot{a} - \mu a = 0. \quad (2.5)$$

The solution is

$$S_\pm = \frac{iL_3 \omega_3 \pm \sqrt{4I_2 \mu - L_3^2 \omega_3^2}}{2I_2}. \quad (2.6)$$

Two types of solution are obtained for the above equation in the case of a projectile.

- If the equation discriminant is positive, a complex solution for S with a positive real part and null imaginary part is obtained. This corresponds to a function that grows indefinitely with time. In conclusion, as the moment increases, the projectile rotates through π radian, resulting in the tip moving backwards and the base moving in the direction of motion. The motion thus becomes unstable.
- If the equation discriminant is negative, then two imaginary roots are obtained and the solution to Equation (2.5) becomes

$$S_\pm = ik(1 \pm d). \quad (2.7)$$

where

$$k = L_3/(2I_2) \text{ and } d = \sqrt{1 - 4\mu I_2/L_3^2}.$$

The more general solution to Equation (2.5) is

$$a = a_p e^{i(\omega_p t + \phi_p)} + a_n e^{i(\omega_n t + \phi_n)}, \quad (2.8)$$

where the first term represents a rotating vector having amplitude a_p and angle $\omega_p t + \phi_p$ that varies with time while it rotates around the centre of gravity with slow circular motion at what is called the precession angular velocity. The second term represents another rotating vector of amplitude a_n and angle $\omega_n t + \phi_n$, which is in the extreme of the a_p vector, with a faster twist, presenting a circular motion with what is called the nutation angular frequency. There is more than one lap of the second vector for each lap of the first vector. The vector obtained by summing the first and second vectors is therefore the attack vector $\vec{a}$, which rotates through an angle ϕ as shown in Figure 1. $\vec{a}$, therefore, determines the resulting motion of the projectile tip and the epicyclic trajectory on the RPP. The angle ϕ does not coincide with the precession angle, except when the nutation angle vanishes.

The solutions of ω_p and ω_n are complex solutions of the precession frequencies ω_p (Equation (2.9)) and nutation (Equation (2.10)), with the condition $\omega_p \rightarrow \omega_n - \omega_p$ where $\omega_p < \omega_n$. The equation of motion of the gyroscopic movement is thus given by Equation (2.5), for which the constants a_p and a_n correspond to complex numbers that are determined from the initial conditions

$$\omega_p = k(1-d), \quad (2.9)$$

$$\omega_n = k(1+d). \quad (2.10)$$

As a consequence, stability of the projectile demands that the discriminant of Equation (2.5) must be negative; i.e. $4I_2\mu - I_3^2\omega_3^2 < 0$ or equivalently

$$S_s = \frac{I_3^2}{4I_2\mu} > 1. \quad (2.11)$$

where S_s is referred to below as the gyroscopic stability coefficient. It is concluded from the above that the projectile is stable if $S_s = I_3^2\omega_3^2/(4I_2\mu)$. This is to say, a projectile is stable if its stability coefficient is greater than 1, as will be shown experimentally. As the projectile has gyroscopic motion, the precession and nutation motions can be calculated experimentally. Likewise, the value of the angle that corresponds to the rotating vectors, having amplitudes a_p and a_n , respectively given by Equations (2.9) and (2.10) for the limit $\theta_0 \rightarrow 0$. The geometric interpretation of the motion described by Equations (2.9) and (2.10) allows the plotting of the projectile tip motion (Figure 3). In the case of the projectile, epicyclic motion appears only with apices facing inwards. It is thus affirmed that the projectile tip describes a gyroscopic motion, represented by a flat curve in the RPPs (Figure 3), with apices facing inwards, tangent to a sphere that has as its origin at the projectile centre of gravity and a radius that is the distance from the centre of gravity to the tip. (The centre of gravity is located at one-third of the projectile longitude from the base of the projectile, as determined by the conical symmetry.)

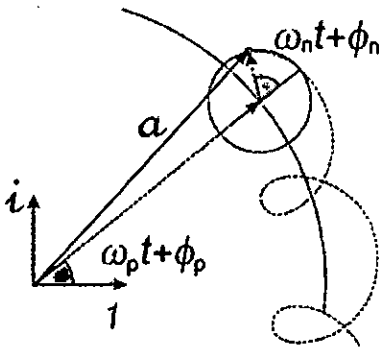


Figure 3. Graphical interpretation of the gyroscope solution.

Results

On the basis of previously developed theoretical models [1], we obtained a set of results in gyroscope and projectile experiments. In the case of a projectile that we are dealing with here, an experimental assembly is made for different parameters and different shooting distances, which are analyzed in the following manner.

- The angles of precession and nutation are plotted against the shooting distance in meters.
- Precession and nutation frequencies are determined from those plots.
- With information on ballistics taken from the literature, the projectile rotation frequency and aerodynamic coefficient are obtained for comparison of the theoretical torque with the experimental torque [2].
- The number of loops per lap, given by $N = \omega_n/\omega_p$, is calculated from the data in Table 1, which were experimentally obtained for the 9-mm projectile. This definition is fulfilled by both the gyroscope and projectile and the angular frequency between the fast and slow vectors. The time between two amplitude maxima is given by $P = 2\pi/\omega_n$, while the period for the slow vector is $P_1 = 2\pi/\omega_p$. From the experimental data, we calculate $N = 2d/(1-d)$ only for the projectile [3].

The stability coefficient given by Equation (2.11) allows the determination of the docility given by Equation (2.2). From the calculation of this parameter and using ballistic data obtained from the technical specifications of the gun and projectile and measurements of the RPPs, the value of d is estimated as $d = \sqrt{1 - 1/S_s}$. The determination of the precession angle θ yields $\omega = I_3\omega/(2I_2)$, $\mu = I_3^2\omega^2/(4I_2S_s)$. The step of the gun striation $n = 2\pi v_0/\omega$ according to Equation (2.4) (Figure 4).

To obtain the information needed to perform the calculations using the aforementioned equations, it is necessary to determine the attack angles of the footprints left by the projectile on the RPPs, the lengths of bullet holes, and the distance between

Table 1. Dynamic quantities calculated from measurements of the target.

Shooting distance (m)	S_s stability	ω_p (s^{-1})	ω_n (s^{-1})	P (s)	μ (Nm)
1	1.20	572.389	2940.798	0.0024	0.582
2	1.29	964.135	2635.205	0.0023	0.526
3	2.39	407.817	3191.523	0.0024	0.458
4	1.99	298.031	3301.309	0.0022	0.621
5	2.05	553.498	3045.842	0.0026	0.699
6	1.77	772.265	2827.075	0.0029	0.602
7	1.91	638.573	2960.767	0.0028	0.557

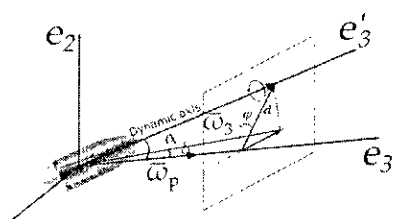


Figure 4. Dynamical axis of rotation and angles ϕ , α and δ for the 9-mm projectile in flight.

tangential points for different angles. With the data obtained for the footprint direction and longitude on the RPPs, the relationship between the longitude and direction is established to determine the curve with the profile of a real projectile and the separation of tangential points is measured for different angles as shown in Figure 5. With this information, we fit a curve to the data (Figure 6), where the variation in the projectile footprint with a variation in the attack angle is seen, resulting in the explicit relation expressed by Equation (3.1). The curve in the figure has a linear behaviour with the footprint data given in millimetres. The relation is

$$\alpha(L) = 8.34L - (81.97 \pm 0.01), \quad (3.1)$$

where L is the footprint length. The coefficient of determination for this case affirms that Equation (3.1) explains the variation in the nutation angle as a function of the footprint length in the RPP with a 99% level of confidence (Figures 5 and 6). Using Equation (3.1), the relation between the projectile footprint measured in the RPP and the shooting distance is analyzed below.

In Table 1, P is the period between two consecutive maxima while the torque μ is calculated with the stability coefficient and the factor d , whereas L_3 is calculated with ω_p (percentage error of 5%).

The magnitudes of the precession and nutation frequencies are adjusted to expected values with a coefficient of determination that on average has an 81% level of confidence, as shown by the aerodynamic results obtained from the general test and from the plots. The average value is obtained from the analysis of 150 targets studied.

The deviations for non-controlled situations in the quantitative analysis of the data recorded for the target footprints relative to expected or theoretical values are a consequence of environmental conditions, such as the wind effect, and the time between shots. This prevented the required stability of RPPs from being fully achieved. Nevertheless, it is possible to appreciate the damping of the projectile motion from the relation of the nutation angle against the shooting distance as shown in Figure 7.

To evaluate the results for the precession frequency and stability, we considered solutions (2.9) and (2.10) to the differential Equation (2.5) with

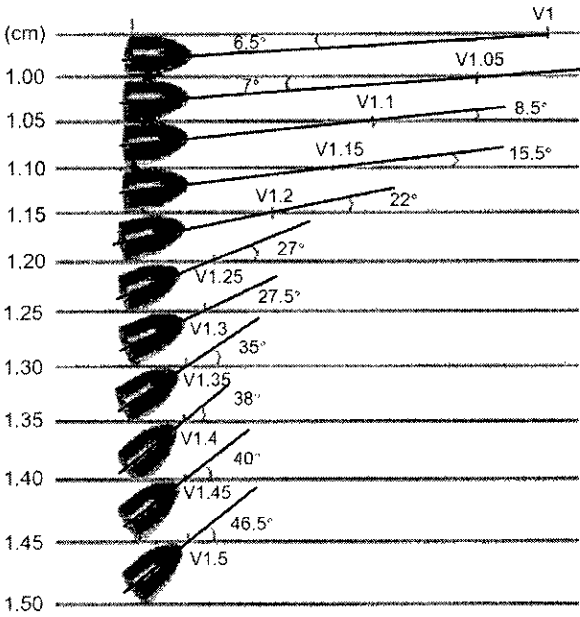


Figure 5. Graphical determination of the rotation angle α according to the tangent to the trajectory.

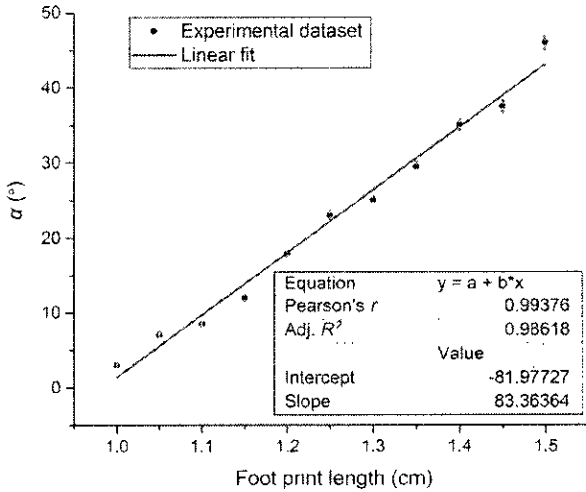


Figure 6. Nutation angle as a function of the footprint length in the target.

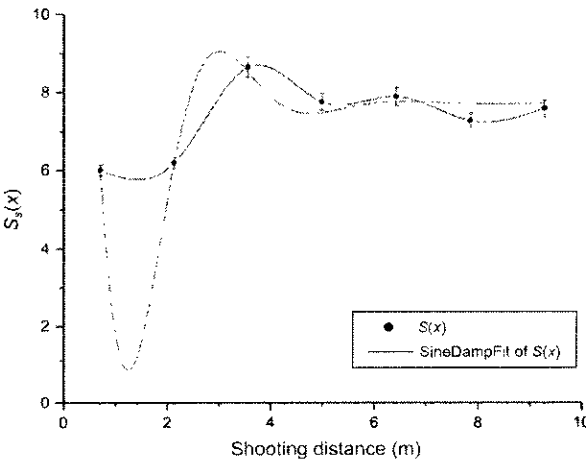


Figure 7. Stability factor as a function of the shooting distance (9-mm calibre ammunition).

parameter values fitted to the trajectory shown in Figure 7. From the fitting curve, the gyroscopic stability factor for the barrel muzzle is obtained as $S_s(x=0) = -4.07$ for the 9-mm calibre projectile with an 89% level of confidence. This result is an approximation of the dynamical stability under real conditions, as seen in Figure 7, where the stability factor is analyzed with respect to the shooting distance.

Further stability analysis is conducted for a distance ranging between 1 m and 7 m. The red curve in Figure 7 has a trend similar to the theoretical trend. Table 1 shows that the projectile is generally stable, with the stability coefficient fluctuating between 1.33 and 2.50, which is accepted for low-calibre ammunition [5].

It is appropriate at this point to comment on the experimental results relating to Table 1, where the calculated dynamical quantities are given. The stability factor fits the theoretical predictions, as the stability is greater than unity for subsonic projectiles; i.e. has values between 1.20 and 2.39. Moreover, Figure 7 shows that the factor S_s is proportional to the square of the rotational speed of the projectile, corresponding to the behaviour of a projectile stabilized by rotation due to striation of the weapon. This result agrees with theory that establishes that projectiles without fins are generally spin stable. However, the stability factor increases for low-calibre projectiles, explaining the jump of the curve in Figure 7. The results in Table 1 thus suggest that the stability factor has a certain level at 3 m and tends to oscillate with decreasing amplitude from this distance until it approaches a constant value with increasing distance, because there it is still a nutation frequency, which vanishes at a distance of approximately 200 m [3].

The following presents relations obtained in the experiments. First, experimental Equation (3.2) describes the relation of stability versus the shooting distance, where the values 1.99 and 2.13, respectively, correspond to values of x that determine the amplitudes of oscillation, showing that the curve fits the theoretical parameters [5] with an 89% level of confidence. It is worth clarifying that there is dynamical stability when $S_s > 1$ (theoretical value $S_s > 1.33$) while the graphical interpretation of the aerodynamic jump between 1.00 and 2.50 m suggests that this jump is due to the chaotic nature of the motion at the beginning of the trajectory (i.e. the ballistic wind). Therefore, from (3.2), with $x=0$, we obtain $S_s = -4.07$, which is in the expected range. After this event, the projectile recovers its sinusoidal motion around the centre of mass and must continue tangent to the trajectory.

The relation of stability versus the shooting distance is

$$S(x) = 1.96 + 57.44e^{-x/0.69} \sin \left[\pi \left(\frac{x-2.08}{1.1} \right) \right] \quad (3.2)$$

Second, Figure 8 presents the adjusted curves for the precession and nutation frequencies as functions of the shooting distance. These angular motions confirm that the centre of mass tends to follow the precession and nutation movements that the projectile tip describes, as seen in Figure 1. The precession reaches a minimum when the nutation reaches a maximum and vice versa as the shooting distance with respect to the RPP varies. It is considered for this experiment that the tip of the flying projectile is in a state of low nutation that approximates it in a small ϕ to the horizontal plane. The relations of the angular frequencies of nutation and precession with the shooting distance in Figure 8 are respectively,

$$\omega_n = 3045.693 + 303.244 \sin \left[\pi \left(\frac{x-1.452}{2.152} \right) \right] \quad (3.3)$$

$$\omega_p = 546.022 + 300.652 \sin \left[\pi \left(\frac{x-0.816}{2.103} \right) \right] \quad (3.4)$$

A value of 3037.38 s^{-1} is read for the angular frequency of nutation in contrast with the value of 554.27 s^{-1} for precession. The adjusted value for the nutation frequency is 3054.01 s^{-1} , in contrast with a value of 537.77 s^{-1} for the precession frequency with an 81% level of confidence. These results show clearly that the slow circular motion corresponds to the angular frequency of precession and the fast circular motion corresponds to the angular frequency of nutation as is predicted by theory [5]. Additionally, Figure 8 shows a dependence of these frequencies on the shooting distance due to stability.

Third, Figure 9 and Table 1 show that the oscillation period of the projectile remains between 0.0022 and 0.0029 s as the shooting distance varies. The periods for shooting distances between 1 and 3 m

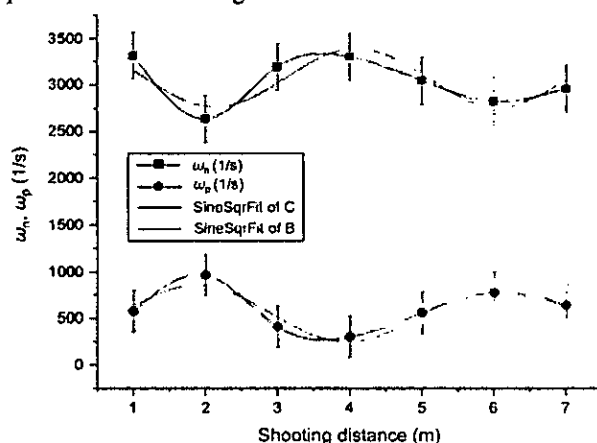


Figure 8. Nutation frequency (upper series) and precession frequency (lower series) as functions of the shooting distance.

are between 0.0024 and 0.0023 s, indicating that the period is at an average amplitude of the curve and therefore showing stability. After 4 m, the curve destabilizes, suggesting that external factors affect the experimental results. The relation between the oscillation period and shooting distance is

$$P(x) = 0.0023 - 6.3340\sin^2\left[\pi\left(\frac{x-2.6600}{8.8190}\right)\right] \quad (3.5)$$

The oscillation period has a minimum value of 0.00225 s and a maximum value of 0.00234 s, with a 70% level of confidence according to the fitting curve.

Finally, the relationship found between the moment and shooting distance is shown in Figure 10. The proposed model expressed by Equation (3.6) explains with a 68% level of confidence the variation in the torque as a function of the shooting distance. The experimental fitted value for the moment is 0.497 Nm, which is comparable to the theoretical value of 0.473 Nm [2]. The model thus explains the theoretical and experimental behaviours with an error of 5.07% approximately. The proposed model is

$$\mu(x) = 0.484 + 0.196\sin^2\left[\pi\left(\frac{x-2.470}{5.374}\right)\right] \quad (3.6)$$

It is interesting to examine the experimental results of the torque–stability relationship, highlighting that the variables are counterposed and that the projectile is docile. S_x is, therefore, the solution to differential Equation (2.5). We thus confirm the exterior ballistics theorem [3] and the validity of the experiment.

Conclusion

Through Riemann projection, the vector Euler equation was reduced to a nonlinear differential equation of a single complex variable. This equation was solved implementing the constant module approximation [1]. The obtained solution is the sum of two vectors rotating on a complex plane. The vector having the greatest magnitude rotates at lower angular velocity while the shorter vector rotates at higher angular velocity. The speed of precession corresponds to the speed of rotation of the vector of greater magnitude, while the speed of nutation corresponds to the difference in speed between the two vectors.

Analysis of the results of experiments designed for a projectile revealed that, on the basis of the theory and experimental data obtained from the projectile’s footprint at the RPP (e.g. the length and shape), for distances greater than 1 m, the same obliquity characteristics are found regardless of the distance or direction of the shot.

Analysis of the curves of the frequencies of nutation and precession described the arrival of the projectile at the target and determined the trajectory through the target, whether it be ascending, descending, or level, as shown in Figure 8. The proposed methodology contrasts with methods used commonly in certain areas; i.e. judicial procedures that conclude the origin of the shot from the direction provided by the contusion are *a priori* results.

Physical and mathematical descriptions of the projectile movement, in general terms, present certain difficulties, because motion descriptions correspond to complex differential equations whose solution is determined by environmental conditions. The simplified solution of these equations depends on gyroscopic movement, the phenomenon of drift and re-elevation.

The nutation angle and precession in RPPs were measured to quantify the gyroscopic stability in the aerodynamic model of a 9-mm calibre projectile. Experimental data were plotted with respect to the shooting distance, with coefficients of determination

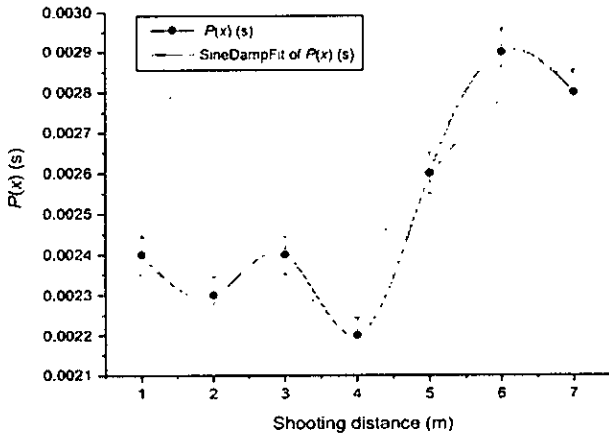


Figure 9. Oscillation period as a function of the shooting distance.

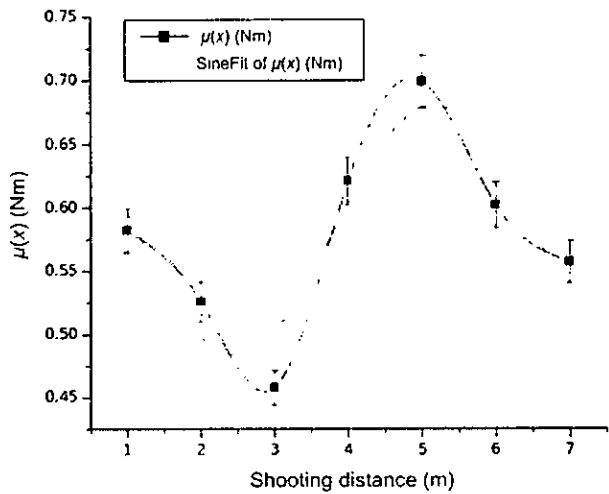


Figure 10. Torque as a function of the shooting distance.

ranging between 0.68 and 0.87. These values indicate the explanatory capacity of the fit corresponding to Equation (3.2) and characterize a projectile at a target.

The experimental data and the calculations made for the 9-mm calibre projectile reveal that the number of rotations per nutation cycle is a linear function of the ratio between the precession and nutation velocities and the average angle of inclination of the projectile axis. This finding agrees with the literature on external ballistics and the results of previous work [1].

When single-projectile impacts are presented, it is necessary to determine the direction of arrival and other possible factors to reconstruct events for the purposes of judicial investigation. The nutation and precession movements are not observable empirically from the projectile footprint *because* these movements cannot be registered using high-speed cameras or computer software. The analysis conducted in this work is applicable to the relation of the shooting distance versus the Euler angle.

Meanwhile, evidence relating to the contusion line, the distribution of embedded powder grains and black smoke are criteria only used for detonations made at close distance. At larger distances, the direction of entry into the target is determined by the shape that suggests the obliquity of the entrance of the projectile to the surface of impact. These criteria must be re-evaluated because distances greater than 1 m have the same characteristics of obliquity in the contusion because the phenomena of nutation and precession generate the same shapes of entry in the target for different distances and directions (Figure 8).

Acknowledgements

The authors gratefully acknowledge Ejercito Nacional de Colombia for organizing the weapon, ammunition, space, and professional shooter in the experiments described in this work.

Authors' contributions

Patricia Morales-Vega and Daniel Esteban Jaramillo-Arango conceived the presented idea, developed the theory and performed the experiments. Jaime Alberto Osorio-Velez designed some of the experimental strategies. David Noreña-Blandón verified the analytical methods. Patricia Morales-Vega and David Noreña-Blandón prepared the manuscript.

Compliance with ethical standards

This article does not contain any studies involving humans or animals performed by any of the authors.

Disclosure statement

No potential conflict of interest is reported by the authors.

References

- [1] Morales P, Jaramillo DE. Experimental aspects of the gyroscope movement. *Rev Mexi Fis.* 2016;62: 44–50.
- [2] Sellier K, Kneubuehl B. Wound ballistics and the scientific background. D-53111. Amsterdam (Netherlands): Elsevier; 1994.
- [3] Cucharelo FP. *Balística exterior*. Madrid (Spain): Ministerio de Defensa; 1994.
- [4] Goldstein H, Poole C, Safko J. *Classical mechanics*. 3rd ed. Boston (MA): Addison-Wesley; 2002. p. 184–188.
- [5] McCoy RL. *Modern exterior ballistics*. Atglen (PA): Schiffer; 1999.

Ecuaciones de Euler y el Movimiento del Trompo

P. Morales, D. E. Jaramillo, J. M. Mira

Instituto de Física, Universidad de Antioquia, A.A. 12 26, Medellín, Colombia

En este trabajo hacemos una revisión didáctica de las ecuaciones de Euler para el cuerpo rígido simétrico. Mostramos que ausencia de fuerzas disipativas y en presencia del campo gravitacional las ecuaciones de Euler se pueden escribir como una ecuación no lineal sobre las componentes de la proyección estereoscópica de Riemann del vector principal en un plano tangente al polo en dirección del campo gravitacional. Finalmente bajo la aproximación de nutación de pequeña amplitud se encuentra solución a dicha ecuación.

Descriptor: Movimiento del trompo, Ecuaciones de Euler.

Keywords:

PACS: 42.25.Gy, 42.25.Lc.

I. INTRODUCCIÓN

El movimiento del trompo siempre ha creado curiosidad a todas las generaciones de físicos, básicamente en relación a la estabilidad que parece adquirir con el movimiento rotacional. Desde Euler se conoce bien la dinámica de este movimiento y son innumerables los artefactos que se han construido aprovechando estas características de los cuerpos en rotación. No es desconocido el uso de giróscopos en los sistemas de navegación de alta confiabilidad.

Aunque La teoría Newtoniana del movimiento puede explicar este comportamiento, las ecuaciones de Newton, que para un cuerpo rígido toman la forma de las ecuaciones de Euler, son, generalmente, de difícil solución. La forma usual de hallar la solución al movimiento de un cuerpo rígido es a través de la formulación Lagrangiana, que corresponde a una primera integral de las ecuaciones de Euler, y hace explícita, además, las cantidades conservadas asociadas a las simetrías del problema. Sin embargo, el movimiento del trompo exhibe una riqueza física de carácter más intuitivo, tal que en las formulaciones más elaboradas de la mecánica tiende a ocultarse. En este trabajo, nos centraremos en las ecuaciones de Euler; desde la formulación primigenia de la mecánica y en la solución de dichas ecuaciones.

El artículo está organizado de la siguiente forma: En la sección II se hace una breve discusión acerca de los sistemas de referencia en los cuales las ecuaciones de Euler son válidas. En la sección III se escriben las ecuaciones de Euler para el trompo simétrico en el plano complejo, donde la variable que da cuenta del movimiento del sólido corresponde a la proyección de Riemann de vector unitario en la dirección del eje principal del trompo. En la sección IV se soluciona la ecuación del trompo en el régimen adiabático y se modela la fricción y el efecto Magnus. En la sección V se reportan las experiencias con un giróscopo comercial en el que se trata de corroborar las predicciones del modelo utilizando un apuntador laser

ubicado en forma estratégica para visualizar la proyección de Riemann en el plano horizontal. Por último en la sección VI se hace un análisis de los datos y se dan las conclusiones.

II. ECUACIONES DE EULER

El cuerpo rígido es un sistema de muchas partículas donde la distancia relativa entre cada par de ellas es supuesta constante, esto permite describir completamente el movimiento del cuerpo con seis grados de libertad. Tres de estos se pueden asociar con el movimiento del centro de masa y los otros tres con el movimiento del cuerpo alrededor del centro de masa, movimientos que, respectivamente, corresponden a los de traslación y rotación del cuerpo.

La dinámica del centro de masa se rige por las ecuaciones de Newton para una partícula puntual, en tanto que el movimiento de rotación, alrededor del centro de masa, se rige por las ecuaciones de Euler.

Las ecuaciones de Euler se han venido expresando en dos marcos de referencia, que parecen dar lugar a dos puntos de vista diferentes en cuanto a su interpretación. En el primer punto de vista, [1] las ecuaciones están dadas para un sistema no rotante cuyos ejes coinciden instantáneamente con los ejes principales del cuerpo; en el segundo punto de vista, [2] se dice que las ecuaciones son válidas para un sistema fijo al cuerpo, el cual rota con él. Para entender bien el origen de esta discrepancia, deduciremos las ecuaciones de Euler en cada uno de aquellos sistemas.

A. Desde un sistema no-rotante ubicado en el centro de masa

Las ecuaciones de Newton para el movimiento rotacional toman la forma

$$\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}, \quad (1)$$

donde τ es la suma de los torques que actúan sobre el cuerpo, $\vec{L}$ es el momento angular del cuerpo y el punto arriba de este significa derivada temporal. Estos vectores en general deben estar expresados con respecto al origen de un sistema inercial. Sin embargo en particular pueden ser expresados con respecto un sistema no rotante con origen en el centro de masa del cuerpo. Lo anterior es posible puesto que las fuerzas inerciales que aparecen por la aceleración del centro de masa son equivalentes a una única fuerza cuya línea de acción pasa por el centro de masa y por tanto no ejerce torque con respecto a este punto.

En general el momento angular del cuerpo está dado por la suma de los momentos angulares de cada partícula que lo conforman.

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i, \quad (2)$$

donde $\vec{r}_i$ es la coordenada de la i -ésima partícula de masa m_i , con respecto al centro de masa. La velocidad de las partículas en este sistema se escribe como $\dot{\vec{r}}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$, donde $\vec{\omega}$ es la velocidad angular del cuerpo, que es la misma para cada punto sobre el cuerpo [3], por tanto el momento angular se puede escribir como

$$\vec{L} = \mathbf{I} \vec{\omega}, \quad (3)$$

donde,

$$\mathbf{I} \equiv - \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \times)^2, \quad (4)$$

es el tensor momento de inercia. La expresión $\vec{r}_i \times \times$ corresponde a un tensor antisimétrico definido a través de la propiedad

$$(\vec{r}_i \times) \vec{\omega} \equiv \vec{r}_i \times \vec{\omega}. \quad (5)$$

El momento de inercia, visto desde un sistema no rotante, es una cantidad que varía con el tiempo, puesto que las coordenadas de las partículas, relativas al centro de masa, cambian continuamente mientras el cuerpo rota, por tanto la derivada del momento angular con respecto al tiempo tendrá contribuciones tanto de la variación de la velocidad angular como de la del momento de inercia. La derivada del momento de inercia se obtiene directamente de la definición (4) y de la identidad de Jacobi para el producto vectorial:

$$(\dot{\vec{r}}_i \times) = (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \times = (\vec{\omega} \times)(\vec{r}_i \times) - (\vec{r}_i \times)(\vec{\omega} \times)$$

para dar

$$\dot{\mathbf{I}} = (\vec{\omega} \times) \mathbf{I} - \mathbf{I} (\vec{\omega} \times) \equiv [(\vec{\omega} \times), \mathbf{I}].$$

En función del momento de inercia la ecuación de movimiento (1) se escribe

$$\vec{\tau} = \vec{\omega} \times \vec{L} + \mathbf{I} \dot{\vec{\omega}} \quad (6)$$

La ecuación (6) corresponde a las ecuaciones de Euler para el cuerpo rígido. En este aproximación hemos considerado que el origen del sistema de coordenado está en el centro de masa del cuerpo y es no rotante, esto es, un sistema que aunque puede ser no inercial sus ejes coordenados son siempre paralelos a los de un sistema inercial.

B. Desde un sistema rotante

Cuando nos ubicamos en el centro de masa con un sistema no rotante, como vimos, las fuerzas inerciales que aparecen no realizan torque, de esta forma el análisis de las rotaciones alrededor del centro de masa es independiente de si este está acelerado o no. Sin embargo, cuando nos montamos en un sistema rotante, fijo al cuerpo, las fuerzas inerciales, debido a la rotación, pueden causar un torque neto.

Sea S un sistema inercial y S' un sistema cuyos ejes coordenados están rotados respecto a los de S , con los orígenes de coordenadas coincidentes en todo momento. Llamaremos vector, en relación a un sistema de referencia, al arreglo matricial de las proyecciones de una cantidad vectorial sobre los ejes coordenados de dicho sistema. De acuerdo a ello el vector $\vec{V}$ en el sistema inercial corresponde al $\vec{V}'$ del sistema rotado multiplicado por una matriz de rotación $\mathbf{R}$, simbólicamente escribimos

$$\vec{V} = \mathbf{R} \vec{V}' \quad (7)$$

Puesto que bajo una rotación las magnitudes y los ángulos entre vectores se preservan, $\mathbf{R}$ debe ser una matriz ortogonal, esto es, $\mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{1}$. Si la matriz de rotaciones depende del tiempo la derivada temporal del vector en el sistema inercial no corresponde a la rotación de la derivada del vector en el sistema rotado. Podemos definir una derivada temporal covariante D_t como la derivada temporal que aplicada a un vector rotado corresponde a la derivada ordinaria del vector en el sistema inercial, esto es un operador que cumple con la condición

$$\frac{d}{dt} \vec{V} = \mathbf{R} D_t \vec{V}'. \quad (8)$$

Lo cual se traduce que cuando la derivada covariante actúa sobre vectores se comporta como

$$D_t = \mathbf{R}^T \frac{d}{dt} \mathbf{R} = \frac{d}{dt} + \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} \equiv \frac{d}{dt} + \vec{\Omega} \times. \quad (9)$$

El último término de la expresión anterior es posible puesto que, por ser $\mathbf{R}$ ortogonal, el producto $\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}$ es

una matriz antisimétrica, la cual a su vez se puede representar en función de tres parámetros independientes que permiten definir un vector, $\vec{\Omega}$.

Para ver el significado físico de este vector consideremos una partícula en movimiento circular alrededor de un eje que atraviesa el origen y con velocidad angular $\vec{\omega}$. Denotando por $\vec{r}$ la posición de esta partícula en el sistema de referencia inercial, su velocidad se escribe $\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Si nos montamos en un sistema de referencia rotante, donde la partícula esté en reposo, el vector posición en este sistema, $\vec{r}' = \mathbf{R}^T \vec{r}$, tendrá derivada temporal nula $\dot{\vec{r}}' = 0$, por tanto, de acuerdo a (8) y (9), se tiene

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \mathbf{R}(\vec{\Omega} \times \vec{r}') = (\mathbf{R}\vec{\Omega}) \times (\vec{r}'), \quad (10)$$

donde hemos usado el hecho que el producto vectorial transforma como un vector bajo rotaciones. Como este análisis es independiente del valor de $\vec{r}$ llegamos finalmente a

$$\vec{\Omega} = \mathbf{R}^T \vec{\omega} \equiv \vec{\omega}'. \quad (11)$$

Lo cual quiere decir que el vector que aparece en la derivada covariante corresponde al vector velocidad angular instantánea de rotación del sistema S' , con respecto a un sistema inercial pero visto desde S' .

De acuerdo a lo anterior, la ecuación (1), para un sistema rotante con velocidad instantánea $\vec{\Omega}$, se puede escribir como

$$\vec{\tau}' = D_t \vec{L}' = \vec{\Omega} \times \vec{L}' + \dot{\vec{L}}'. \quad (12)$$

En particular, si el cuerpo está en reposo en el sistema rotante entonces el tensor de inercia $\mathbf{I}'$ es constante y $\vec{\Omega} = \vec{\omega}'$ con lo cual la ecuación anterior se puede escribir como

$$\vec{\tau}' = \vec{\omega}' \times \vec{L}' + \mathbf{I}' \dot{\vec{\omega}}', \quad (13)$$

que tiene exactamente la misma forma que (6), excepto que en este caso las cantidades están medidas desde el sistema rotante fijo al cuerpo.

C. Correspondencia de las dos interpretaciones

El análisis anterior quiere decir que ambas interpretaciones de las ecuaciones de Euler son correctas, esto es, la forma de las ecuaciones de Euler son exactamente las mismas, tanto en un sistema no-rotante como en un sistema rotante fijo con el cuerpo, con orígenes en el centro de masa.

Sin embargo aunque la forma de las ecuaciones es la misma ambos sistemas, la interpretación física, en cambio, que se hace de cada término, depende del sistema de referencia. Para darle una interpretación al término $\vec{\omega}' \times \vec{L}'$ en el sistema rotante reescribimos la ecuación (1) haciendo uso de (2) y la derivada covariante, de la siguiente forma

$$\vec{\tau}' = \sum_i m_i \vec{r}'_i \times D_t^2 \vec{r}'_i, \quad (14)$$

donde la derivada covariante segunda resulta ser

$$D_t^2 \vec{r}'_i = \ddot{\vec{r}}'_i + 2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}'_i + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}'_i) + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}'_i.$$

Si el sistema rota fijo al cuerpo entonces las partículas en ese sistema están inmóviles y se tiene $\dot{\vec{r}}'_i = 0$ y $\ddot{\vec{r}}'_i = 0$. La velocidad de rotación del sistema es en ese caso el vector velocidad angular del cuerpo en el sistema S' , por tanto (14) se expande como

$$\vec{\tau}' = \sum_i m_i \vec{r}'_i \times (\vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}'_i)) + \sum_i m_i \vec{r}'_i \times \dot{\vec{\omega}}' \times \vec{r}'_i. \quad (15)$$

Vemos que el primer sumando del lado derecho de la ecuación anterior es la suma de los torques generados por la fuerza centrífuga que experimenta cada partícula al estar el cuerpo en rotación. Usando la identidad de Jacobi para este término, concluimos que finalmente corresponde a $\vec{\omega}' \times \vec{L}'$. Así que, desde el punto de vista del sistema rotante, el momento de inercia no cambia, y el producto vectorial entre la velocidad angular y el momento angular proviene de las fuerzas inerciales que aparecen por estar en un sistema no inercial, mientras que desde el punto de vista del sistema no-rotante, ubicado en el centro de masa, este producto proviene sólo de la variación temporal del momento de inercia, y no de las fuerzas inerciales.

Finalmente, sintetizamos esta discusión de la siguiente manera: la expresión general, $\vec{\tau} = D_t \vec{L}$, en un sistema rotante con velocidad angular arbitraria, e instantánea, $\vec{\Omega}$, (omitendo las primas), se escribe

$$\vec{\tau} = \dot{\mathbf{I}}\vec{\omega} + \mathbf{I}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\Omega} \times \mathbf{I}\vec{\omega}.$$

En particular, para el sistema rotante el primer sumando del lado derecho se anula, en tanto que el tercer sumando es el responsable del producto vectorial entre la velocidad y el momento angulares. Para el sistema no-rotante la situación se invierte, el tercer sumando es quien se anula, mientras que el primero es el responsable de aquel producto. Esto queda resumido en la siguiente tabla

Sistema	valor de $\dot{\mathbf{I}}$	valor de $\vec{\Omega}$
No rotante	$[\vec{\omega} \times, \mathbf{I}]$	0
Rotante	0	$\vec{\omega}$

De acuerdo a la tabla anterior vemos que la ecuación de movimiento tiene exactamente la misma forma en estos dos sistemas, y son estos los dos únicos tipos de sistemas donde son válidas las ecuaciones de Euler, como las conocemos, en su forma no covariante.

En ciertas ocasiones, para cuerpos simétricos (con dos momentos de inercia principales iguales) en un campo

gravitacional, puede ser más conveniente escoger un tercer sistema, uno que esté rotando con solo uno de sus ejes rígidamente atado al cuerpo y coincidente con el eje principal (diferente a los que expresan los momentos de inercia iguales) del cuerpo, y con un segundo eje que esté siempre sobre el plano perpendicular al campo gravitacional. En ese caso, debido a la simetría del cuerpo se cumple que el tensor de inercia es constante $\dot{\mathbf{I}} = 0$, sin embargo, ya la velocidad angular de rotación del sistema no coincide con el vector velocidad angular del cuerpo en el sistema rotante $\vec{\Omega} \neq \vec{\omega}'$, por tanto las ecuaciones del movimiento de rotación no presentan la forma de las ecuaciones de Euler estándar.

III. MOVIMIENTO DEL TROMPO

Entenderemos por trompo un objeto masivo con simetría axial que puede rotar alrededor de un punto fijo ubicado en su eje de simetría, en presencia de la gravedad. Debido a la simetría uno de los ejes principales coincidirá con el eje de simetría, que llamaremos principal, y los otros dos estarán en un plano perpendicular a ese eje que llamaremos secundarios. En general el punto fijo no coincide con el centro de masa del trompo por tanto al escribir las ecuaciones de Euler en el centro de masa el torque generado por la reacción en el punto fijo va depender de la dinámica del centro de masa. Lo más conveniente es escribir las ecuaciones de Euler con respecto al punto fijo, en cuyo caso el torque de las fuerzas inerciales que aparecen actuando sobre el centro de masa se hacen corresponder exactamente a un incremento del momento inercia de los ejes secundarios, y por tanto las ecuaciones de Euler no cambian de forma. Ello constituye la esencia del teorema de Steiner.

A. Parametrizando las rotaciones

Para parametrizar de forma adecuada la posición del trompo en un instante de tiempo determinado la consideramos como una transformación de rotación desde la posición donde el eje de simetría es vertical. Debido a la ortogonalidad una matriz de rotaciones se puede escribir como el exponente de una matriz antisimétrica, por tanto una matriz de rotaciones (en tres dimensiones) tendrá la forma [6]

$$\mathbf{R}(\vec{\alpha}) = e^{\vec{\alpha} \times}. \quad (16)$$

donde la dirección de $\vec{\alpha}$ determina el eje de rotación y su magnitud el ángulo rotado. Haciendo la expansión del exponencial y considerando las propiedades del producto vectorial la matriz de rotaciones se puede escribir como

$$\mathbf{R} = \hat{u}\hat{u}^T + \sin \alpha (\hat{u} \times) - \cos \alpha (\hat{u} \times)^2, \quad (17)$$

con $\alpha \equiv |\vec{\alpha}|$ y $\hat{u} \equiv \vec{\alpha}/\alpha$, de donde se puede obtener directamente,

$$\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} = \left(\dot{\alpha} \hat{u} - (1 - \cos \alpha) \hat{u} \times \dot{\hat{u}} + \sin \alpha \dot{\hat{u}} \right) \times. \quad (18)$$

La expresión entre paréntesis del lado derecho de (18) corresponde a la velocidad instantánea de la rotación. En el caso en que $\hat{u}$ sea constante la velocidad de rotación es $\vec{\Omega} = \dot{\vec{\alpha}}$, como era de esperarse. Sin embargo vemos que para rotaciones que van cambiando con el tiempo su eje de rotación la expresión de la velocidad angular se torna un poco obscura en su interpretación, en ese caso es más conveniente escribir la matriz de rotaciones como un producto de rotaciones elementales alrededor de los ejes coordenados, en dirección de los vectores unitarios $\hat{e}_i$ de la forma

$$\mathbf{R}(\theta \hat{e}_i) = e^{\theta \hat{e}_i \times}. \quad (19)$$

En la parametrización de Euler la matriz de rotaciones se escribe como el producto de tres rotaciones elementales dos sobre el eje $\hat{e}_3$, mediadas por otra sobre el eje $\hat{e}_1$ de la forma siguiente,

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\phi \hat{e}_3) \mathbf{R}(\theta \hat{e}_1) \mathbf{R}(\psi \hat{e}_3) \equiv \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3, \quad (20)$$

donde θ , ϕ y ψ son llamados los ángulos de Euler. Siempre es posible encontrar los parámetros $\vec{\alpha}$, de la rotación única $\exp(\vec{\alpha} \times)$ equivalente, en función de los ángulos de Euler. Parametrizando la dirección del eje de rotación de la rotación única como

$$\hat{u} = \cos \eta \sin \rho \hat{e}_1 + \sin \eta \sin \rho \hat{e}_2 + \cos \rho \hat{e}_3$$

y comparando las representaciones matriciales en ambas parametrizaciones se encuentra que los parámetros α , ρ y η en función de los ángulos de Euler se escriben como

$$\cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\phi + \psi}{2} \right), \quad (21)$$

$$\tan \rho = \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \csc \left(\frac{\phi + \psi}{2} \right), \quad (22)$$

$$\tan \eta = \tan \left(\frac{\phi - \psi}{2} \right). \quad (23)$$

Debido al carácter vectorial de $\vec{\omega}$ la transformación bajo rotaciones de la matriz $(\vec{\omega} \times)$ se puede escribir como

$$\mathbf{R}^T (\vec{\omega} \times) \mathbf{R} = (\mathbf{R}^T \vec{\omega}) \times = \vec{\omega}' \times. \quad (24)$$

Se tiene entonces, para el producto de la rotación inversa con su derivada de la matriz (20), la siguiente expresión en función de los ángulos de Euler

$$\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} = \left(\dot{\psi} \hat{e}_3 + \dot{\theta} (\mathbf{R}_3^{-1} \hat{e}_1) + \dot{\phi} (\mathbf{R}_3^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \hat{e}_3) \right) \times \quad (25)$$

La expresión entre parentesis del lado derecho corresponde a la velocidad instantánea de rotación en el sistema rotante. En forma explícita esa velocidad se escribe como

$$\vec{\omega}' = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix} \quad (26)$$

En la Figura 1 se da una representación gráfica de los ángulos de Euler, donde se puede determinar por inspección la velocidad $\vec{\omega}'$ en función de las velocidades angulares asociadas a estos ángulos dada en (26).

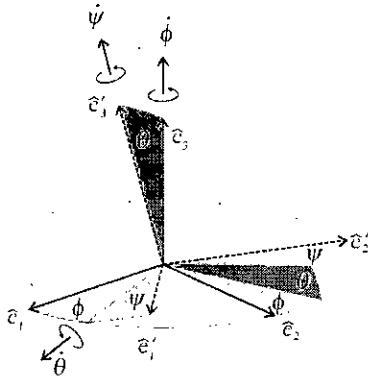


Figura 1: Ángulos de Euler con sus velocidades respectivas

B. Ecuaciones de movimiento del trompo

Tomando el sistema de referencia fijo al cuerpo (omitiendo las primas), con el origen en el punto fijo y sus ejes coordenados paralelos a los ejes principales del cuerpo, el tensor de inercia es diagonal y sus momentos de inercia principales I_i se ordenan de forma que los ejes secundarios sean los dos primeros y el principal el tercero, de acuerdo a ello $I_1 = I_2 \neq I_3$. El centro de masa se halla en el eje principal en dirección $\hat{e}_3$, a una distancia h del punto fijo. El campo gravitacional, vertical hacia abajo, va en la dirección $-\mathbf{R}^T \hat{e}_3$ desde el sistema fijo al el cuerpo. Por tanto el torque de la fuerza gravitacional, en el centro de masa viene dado por

$$\vec{\tau} = -h \hat{e}_3 \times mg \mathbf{R}^T \hat{e}_3 = \mu \sin \theta (\cos \psi \hat{e}_1 - \sin \psi \hat{e}_2) \quad (27)$$

donde $\mu \equiv mgh$ es el torque máximo.

En forma matricial las ecuaciones de Euler en el sistema de ejes principales se escriben

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} \quad (28)$$

desarrollando el producto vectorial y considerando la igualdad de los dos momentos principales secundarios se tienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \omega_2 \omega_3 (I_3 - I_1) + I_1 \dot{\omega}_1, \\ \tau_2 &= -\omega_1 \omega_3 (I_3 - I_1) + I_1 \dot{\omega}_2, \\ \tau_3 &= I_3 \dot{\omega}_3. \end{aligned} \quad (29)$$

Considerando que el torque con respecto al punto fijo es netamente de origen gravitacional (despreciando la fricción) entonces $\tau_3 = 0$ y la última de las ecuaciones anteriores implica que la velocidad angular en la dirección del eje principal, ω_3 , es constante. Sumando la primera ecuación en (29) con la segunda multiplicada por el número imaginario i , se obtiene la ecuación compleja

$$\tau = -i \omega \omega_3 (I_3 - I_1) + I_1 \dot{\omega} \quad (30)$$

donde $\tau \equiv \tau_1 + i\tau_2$ y $\omega \equiv \omega_1 + i\omega_2$. Con los valores de la velocidad y del torque en función de los ángulos de Euler dados en (26) y (27), se tiene para estas cantidades complejas

$$\tau = \mu \sin \theta e^{-i\psi}, \quad (31)$$

$$\omega = \Omega e^{-i\psi}, \quad (32)$$

con

$$\Omega \equiv (\dot{\theta} + i\dot{\phi} \sin \theta). \quad (33)$$

Introduciendo estos valores en (30) y factorizando el exponencial $e^{-i\psi}$ se consigue la ecuación diferencial

$$\mu \sin \theta = i \Omega (\dot{\phi} \cos \theta I_1 - L_3) + I_1 \dot{\Omega}, \quad (34)$$

donde $L_3 = I_3 \omega_3$ es el momento angular en la dirección del eje principal $\hat{e}_3$. Para hallar una ecuación en función de una sola variable compleja se propone

$$a = -i \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i\phi} \quad (35)$$

La variable a corresponde a la proyección de Riemann de un punto de la esfera en el plano, donde la parte real es la componente en la dirección $\hat{e}_1$ y la imaginaria en la dirección $\hat{e}_2$ (Ver figura 2). Derivando con respecto al tiempo la expresión anterior obtenemos

$$\dot{a} = a \Omega \csc \theta \quad (36)$$

lo que nos permite despejar a Ω y reemplazarlo en la ecuación (34) para dar

$$\mu a = I_1 \frac{\dot{a}^2}{a} (\cos \theta - 1) - i L_3 \dot{a} + I_1 \ddot{a} \quad (37)$$

donde en función de a la función coseno se puede escribir como

$$\cos \theta = \frac{1 - |a|^2}{1 + |a|^2} \quad (38)$$

La ecuación (37) con la condición L_3 constante es equivalente a las ecuaciones de Euler (29) para el trompo y es la ecuación diferencial del trompo para la variable compleja a . Esta ecuación es la generalización a ángulos mayores, de la ecuación del giroscopo dada en balística exterior para el caso de proyectiles donde el ángulo cenital θ es pequeño [4].

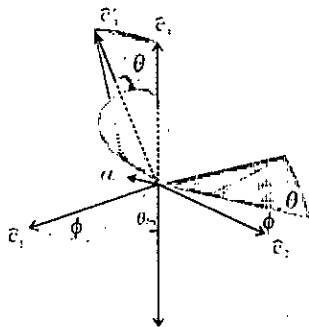


Figura 2: Variable a en función de los ángulos θ y ϕ

IV. SOLUCIONES A LA ECUACIÓN DEL TROMPO

La ecuación (37) es no lineal de segundo orden en a , de variable compleja no analítica. Todo esto insinúa que su solución exacta, para el problema general, se torna complicada. Sin embargo para ciertos casos particulares se puede hallar una solución exacta y, bajo ciertas aproximaciones, se logra proponer una solución aproximada que puede contrastarse con el experimento.

A. Precesión Uniforme

Físicamente se sabe que existe una solución donde el trompo precesa con ángulo cenital θ_0 fijo y velocidad azimutal $\dot{\phi}$ constante, esto corresponde al vector rotante

$$a(t) = -i \tan\left(\frac{\theta_0}{2}\right) e^{i\dot{\phi}t} \quad (39)$$

Los valores de $\dot{\phi}$ permitidos se consiguen introduciendo esta solución en la ecuación (37) para obtener la ecuación característica

$$I_1 \cos \theta_0 \dot{\phi}^2 - L_3 \dot{\phi} + \mu = 0. \quad (40)$$

Las raíces de esta ecuación son

$$\dot{\phi}_{\pm} = \frac{L_3 \pm \sqrt{L_3^2 - 4\mu I_1 \cos \theta_0}}{2I_1 \cos \theta_0} \equiv \alpha \pm \beta. \quad (41)$$

correspondientes a los casos de precesión rápida y lenta respectivamente.

En el caso de trompo rápido $L_3^2 \gg 4\mu I_1$, estas raíces toman los valores $\dot{\phi}_+ \approx L_3/(I_1 \cos \theta_0)$ para la precesión rápida y $\dot{\phi}_- \approx \mu/L_3$ para la lenta. En ese límite la precesión rápida es independiente del momento μ , podemos entonces asociarla con la precesión del cuerpo en ausencia de torques, ó con la nutación. En el mismo límite la segunda raíz es la expresión familiar de la precesión del trompo, cuando el punto fijo no coincide con el centro de masa, dada en cualquier texto de mecánica. Aunque la expresión exacta (41) para la frecuencia de precesión $\dot{\phi}_-$ no es tan familiar, se puede ver sin dificultad que es el resultado correcto, partiendo directamente de las ecuaciones de movimiento en la forma (12).

Para la precesión uniforme el momento angular rota con la velocidad angular de precesión, tomando entonces un sistema rotante alrededor del eje vertical con la velocidad de precesión el término $\vec{L}$ en (12) se anula, quedando

$$\vec{\tau} = \vec{\dot{\phi}} \times \vec{L} \quad (42)$$

donde $\vec{\dot{\phi}}$ es la velocidad de precesión y el torque tiene por magnitud $\tau = \mu \sin \theta_0$. De acuerdo a lo anterior la magnitud de la velocidad de precesión es

$$\dot{\phi} = \frac{\mu \sin \theta_0}{L \sin(\theta_0 - \theta_L)} \quad (43)$$

donde θ_L es el ángulo entre el momento angular y el eje $\hat{e}_3$ del trompo.

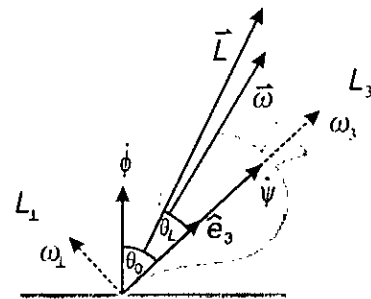


Figura 3: Plano cenital del Trompo

Este ángulo usualmente es pequeño (ó próximo a π) y para un trompo que gira rápidamente en primera aproximación es cero (ó π) y la velocidad de precesión es entonces $\dot{\phi} \approx \mu/L_3$. Sin embargo en general, (43) corresponde a

$$\dot{\phi} = \frac{\mu \sin \theta_0}{L_3 \sin \theta_0 - L_{\perp} \cos \theta_0} \quad (44)$$

donde hemos usado $L_3 = L \cos \theta_L$ y $L_\perp = L \sin \theta_L$. Considerando que la componente transversa del momento angular es $L_\perp = I_1 \omega_\perp$ y que la componente transversa de la velocidad angular proviene de la velocidad de precesión, de forma que $\omega_\perp = \dot{\phi} \sin \theta_0$, llegamos a la ecuación para la velocidad de precesión

$$\dot{\phi} = \frac{\mu}{L_3 - \dot{\phi} I_1 \cos \theta_0}. \quad (45)$$

que equivale a la ecuación cuadrática en $\dot{\phi}$ dada en (40).

Se podría pensar que la solución más general es una combinación lineal de estas soluciones, con lo que podríamos asociar $\dot{\phi}_-$ con la velocidad angular de precesión y $\dot{\phi}_+$ con la de nutación, pero esto no es posible puesto que la ecuación es no lineal, y por tanto una combinación lineal de las soluciones ya no es solución.

B. Nutaciones de Pequeña Amplitud

En esta sección se hallará una solución mas general, aunque aproximada, a la ecuación del trompo (37) que la dada en la sección anterior. En función de la variable s definida como

$$s = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (46)$$

la ecuación diferencial (37) se puede rescribir como

$$I_1 \dot{s} = -I_1 s^2 \cos \theta + i \omega_3 I_3 s + \mu, \quad (47)$$

la cual corresponde a una ecuación no lineal de primer orden en s , que no es trivial por el hecho que la variable angular θ depende a su vez de la integral de s a través de

$$\theta(t) = 2 \arctan \left| e^{\int_{t_0}^t s dt} \right|. \quad (48)$$

Podemos allanar el problema reemplazando el valor de θ por un valor medio θ_0 considerando pequeñas oscilaciones, entonces la ecuación (47) se escribe

$$\dot{s} = -\cos \theta_0 (s - i\dot{\phi}_+)(s - i\dot{\phi}_-), \quad (49)$$

donde las raíces $\dot{\phi}_\pm$ están dadas en (41).

La ecuación diferencial (49) se resuelve separando variables e integrando por fracciones parciales para luego exponenciar con lo que se obtiene

$$s = i\alpha + \beta \cot x, \quad (50)$$

donde

$$x = \beta(\cos \theta_0)t + c, \quad (51)$$

con c una constante de integración en general compleja. La parte imaginaria de c es la cantidad relevante puesto que su parte real puede ser borrada con una traslación

temporal. Teniendo en cuenta que (46) el valor de a se obtiene tras integrar y exponenciar (50), para obtener

$$a = A e^{\int s dt} = A e^{i\alpha t} (\sin x)^{\sec \theta_0}, \quad (52)$$

donde A es una constante de integración. Salvo una constante, la función $\sin x$ exponenciada se comporta como

$$(\sin x)^{\sec \theta_0} \sim e^{-i\beta t} (1 - e^{2ix})^{\sec \theta_0}, \quad (53)$$

por tanto finalmente a se puede escribir como

$$a = a_p e^{i(\alpha - \beta)t} \left(1 - B e^{2i\beta(\cos \theta_0)t} \right)^{\sec \theta_0}, \quad (54)$$

donde a_1 y B son constantes arbitrarias. En el límite en que $B \rightarrow 0$ se tiene para a la solución de precesión lenta, en el caso en que $B \rightarrow \infty$ (con $a_1 B$ finito) se llega a la solución de precesión rápida. Experimentalmente la precesión es de menor frecuencia que la nutación, por lo tanto la solución para nutaciones de pequeñas amplitudes corresponde a (54) con $|B| \ll 1$. Haciendo la aproximación binomial del término entre parentesis en (54) se tiene

$$a = a_p e^{i\omega_p t} + a_n e^{i(\omega_n + \omega_p)t} \quad (55)$$

con $|a_n| \ll |a_p|$, donde las frecuencias ω_p y ω_n corresponden a las frecuencias de precesión y nutación del trompo, y están dadas por

$$\omega_p = \alpha - \beta = \dot{\phi}_-, \quad (56)$$

$$\omega_n = 2\beta \cos \theta_0 = (\dot{\phi}_+ - \dot{\phi}_-) \cos \theta_0 \quad (57)$$

En el límite $\theta_0 = \pi/2$ se obtiene $\omega_p = \mu/L_3$ y $\omega_n = L_3/I_1$. El valor de θ_0 está relacionado con las amplitudes a_n y a_p por la raíz del promedio temporal de $|a|^2$,

$$\tan \frac{\theta_0}{2} = \sqrt{a_p^2 + a_n^2} \quad (58)$$

La figura 4 es una representación gráfica de la solución dada en (55).

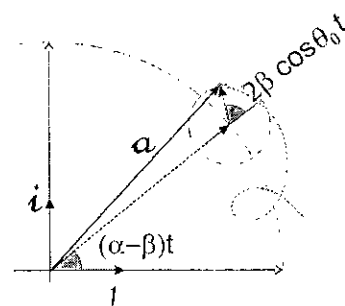


Figura 4: Representación gráfica de la solución

C. Modelando la fricción

Para dar cuenta de la fricción consideraremos, en primera aproximación, que el torque asociado depende linealmente de la velocidad angular, $\vec{\tau}^{(f)} = -\mathbf{C}\vec{\omega}$, donde $\mathbf{C}$ es en general un tensor de rango dos. Por la simetría del problema el sistema propio del tensor de coeficiente de fricción debe ser diagonal en el sistema de ejes propios del cuerpo,

$$\tau_i^{(f)} = -C_i \omega_i \quad (59)$$

de tal forma que los coeficientes asociados a los primeros dos ejes son iguales y, en principio mayores al del tercero: $C_1 = C_2 > C_3$.

De la tercera ecuación en (29), con el torque de fricción dado en (59), vemos que la rata de cambio de la velocidad angular ω_3 es negativa y proporcional a la misma velocidad, por tanto decae exponencialmente como

$$\omega_3(t) = e^{-\gamma t} \omega_3(0)$$

donde $\gamma = C_3/I_3$ es el inverso del tiempo de relajación para la velocidad angular ω_3 . En la aproximación adiabática donde el tiempo de relajación es muy pequeño con respecto al periodo de rotación, $C_3 \ll L_3$, podemos considerar que para tiempos cortos la velocidad angular en la dirección del eje del trompo es prácticamente constante, y la solución al movimiento es la misma que para el movimiento no amortiguado con la dependencia del momento angular con el tiempo $L_3(t) = e^{-\gamma t} L_3(0)$.

Adicional al efecto de frenado de la velocidad de rotación hemos de considerar el efecto Magnus, que consiste básicamente en la fuerza producida por una diferencia de presiones en la superficie de un cuerpo rotante cuando el cuerpo se traslada en un medio viscoso. Esta fuerza es proporcional al producto vectorial entre las velocidades de traslación y rotación. En el caso del trompo la velocidad angular está principalmente dada por la componente en la dirección del eje principal, ω_3 , en tanto que la velocidad del centro de masa, con respecto al punto fijo, es proporcional a $\vec{\omega}_\perp \times \hat{e}_3$, por tanto la fuerza Magnus es proporcional a $\vec{\omega}_3 \times (\vec{\omega}_\perp \times \hat{e}_3)$. Suponiendo que la línea de acción de esta fuerza pasa por el eje del trompo torque de la fuerza Magnus se escribe

$$\vec{\tau}^{(m)} = D(\hat{e}_3 \times)^2 (\vec{\omega}_\perp \times \vec{\omega}_3) = D\vec{\omega}_3 \times \vec{\omega}_\perp \quad (60)$$

donde D es una cantidad positiva que tiene unidades de momento de inercia, que depende de la geometría del trompo y que en principio consideraremos constante. El torque complejo $\tau = \tau_1 + i\tau_2$, debido a la fricción transversa y al efecto Magnus se escribe

$$\tau = (iD\omega_3 - C_1)\omega. \quad (61)$$

Considerando las expresiones (32) se tiene la adición de estos torques al gravitacional (31), en la ecuación del giroscopo (37), se pueden llevar a cabo con el reemplazo

$$\mu \rightarrow \mu + (iD\omega_3 - C_1)\Omega \csc \theta$$

teniendo en cuenta (36), observamos que ese cambio es equivalente al reemplazo

$$L_3 \rightarrow L_3(1 + D/I_3) + iC_1$$

en (37). El coeficiente D , que da cuenta del efecto magnus, se puede interpretar como un aumento del momento de inercia con respecto al eje principal, debido al arrastre del aire alrededor del trompo. Por otro lado puesto que el valor de L_3 está involucrado en las frecuencias de nutación y precesión, el coeficiente C_1 , que puede ser interpretado como un momento angular imaginario, está relacionado con la amortiguación de las amplitudes de precesión y nutación. Considerando rotaciones rápidas $L_3 \gg C_1$ tenemos entonces que las magnitudes a_p y a_n , en (55), cambian aproximadamente como

$$a_p \rightarrow e^{\gamma_p t} a_p$$

$$a_n \rightarrow e^{-\gamma_n t} a_n$$

donde para rotaciones rápidas ($L_3^2 \gg \mu I_1$) $\gamma_p \approx \mu C_1/L_3^2$ y $\gamma_n \approx C_1/I_1$. Algo notable es que el signo de γ_p depende del de μ , por tanto la amplitud de la precesión crecerá en tanto μ sea positivo, y decrecerá si μ es negativo. También notamos que γ_p depende inversamente del momento angular L_3 por tanto la amplitud a_p se hace casi constante para grandes valores de este. Por otro lado la amplitud de la nutación es siempre decreciente y el tiempo de relajación $1/\gamma_n$ es prácticamente independiente de las condiciones cinemáticas del trompo. Puesto que $L_3^2 \gg \mu I_1$, entonces $\gamma_n \gg |\gamma_p|$, ello significa que para rotaciones rápidas la nutación se extingue mucho antes que la amplitud de la precesión cambie significativamente.

Dado que el momento angular L_3 está variando con el tiempo las frecuencias de precesión y nutación también lo están haciendo en forma aproximada como

$$\omega_p \rightarrow e^{\gamma t} \omega_p$$

$$\omega_n \rightarrow e^{-\gamma t} \omega_n$$

Finalmente, considerando la fricción el movimiento del trompo queda descrito aceptablemente como

$$a = a_p e^{\gamma_p t} e^{i\omega_p e^{\gamma t} t} + a_n e^{-\gamma_n t} e^{i(\omega_n e^{-\gamma t} + \omega_p e^{\gamma t}) t} \quad (62)$$

V. MONTAJE EXPERIMENTAL

En esta sección mostraremos los resultados que se obtuvieron al experimentar con un giroscopo marca Pasco ME 8960. Este aparato consiste en un disco de 1.755 kg masa, con un radio de 12.7 cm y un grueso de 2.0 cm, el cual puede rotar alrededor de un eje con poca fricción que a su vez puede orientarse en cualquier dirección azimutal, en el rango de 40° a 130° con respecto al cenit.

El eje orientable posee un punto fijo a 12.7 cm del disco, que esta pivotado, a 30.7 cm del suelo sobre una barra vertical. La barra vertical está clavada en el centro de una base de fundición de hierro en forma de **A**, y puede rotar alrededor de su eje. En el otro extremo del eje orientable, opuesto al disco, se pueden colocar contrapesos para variar la ubicación del centro de masa.

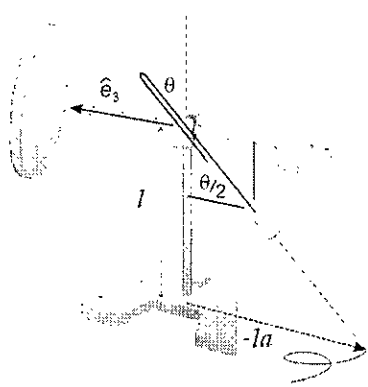


Figura 5: Giroscopio

Colocando un apuntador laser en la biceptriz del ángulo formado por el eje orientable del disco y la barra vertical es posible obtener una representación observable del vector a en el punto donde la luz laser choca con el suelo. El plano complejo en el cual se ubica el vector a corresponde al horizontal. Lo anterior se consiguió con una estructura simple de alambre galvanizado calibre 12 en forma de cuadrilátero equilátero, de ángulo variable, donde dos lados adyacentes coinciden con los ejes, vertical y orientable del giroscopio. El apuntador se colocó sobre la diagonal que biceca esos lados. Inicialmente se colocaron los contrapesos en el eje del disco de tal forma que el centro de masa quedara ubicado do justo en el punto de pivote del eje orientable. Posteriormente se colocó un contrapeso de masa 151.48 gm en uno de los extremos del eje orientable. Se hicieron experimentos con el contrapeso adelante del disco a 21.0 cm del punto de pivote, y luego con el contrapeso atrás del disco a 34.5 cm del punto de pivote. El valor de la masa del contrapeso multiplicado por la distancia al punto de pivote y por el valor de la gravedad da cuenta efectiva del torque máximo μ al que es sometido el giroscopio. El disco se puso a rotar alrededor del eje orientable a distintas velocidades. Se tomaron fotos de la trayectoria del punto de luz en el piso con una camara digital con control de tiempo de abertura. Para nuestro caso se hicieron exposiciones de 15 s y 30 s.

Las Figuras 6 y 8 muestran las fotos de dos situaciones diferentes del trazo laser en el movimiento del giroscopio con el contrapeso atrás y adelante respectivamente.

Las gráficas en las Figuras 7 y 9 muestran la solución (62) con valores de los parámetros $a_n, a_p, \gamma, \gamma_p, \gamma_n, \omega_n$ y ω_p , que se ajustan a las trayectorias mostradas en las fotos mostradas en las figuras 6 y 8.

En principio de las fotos es posible determinar con rel-



Figura 6: Trazo laser en el giroscopio con contrapeso atrás

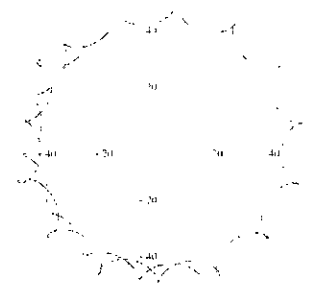


Figura 7: Ajuste de la ecuación del trompo de la foto dada en la Figura 6 con $a_p=48, a_n=6, \gamma_p=-0.005 \omega_p, \gamma_n=0.065 \omega_p, \gamma=0.0013 \omega_p, \omega_n=-14.9 \omega_p$ y $\omega_p=0.5983 \text{ s}^{-1}$.

ativa precisión las frecuencias de precesión y de nutación, los parámetros de amortiguamiento y el ángulo de inclinación del eje del disco. Sin embargo de los registros fotográficos no es posible determinar directamente la componente de la velocidad angular de rotación ω_3 . Para ello se puede hacer uso de un cronómetro controlado con foto puertas, que junto con las fotos se obtiene una información completa del movimiento del giroscopio.

VI. CONCLUSIONES

En la primera parte hemos mostrado la equivalencia de las formulaciones de la ecuación de Euler en los sistemas rotante y no rotante, aunque la expresión de la ecuación es idéntica la interpretación física difiere considerablemente. Escribimos la ecuación de Euler para el caso particular en que el cuerpo rígido posee dos valores iguales de momentos de inercia principales, y el cuerpo se mueve con un punto fijo ubicado en el tercer eje principal. La ecuación vectorial se redujo a una ecuación diferencial no lineal de una sola variable compleja. Se solucionó esta ecuación haciendo la aproximación de módulo constante. La solución hallada consistió en la suma de dos vectores rotantes en el plano complejo. El vector de mayor magnitud rota a velocidad angular menor y el menor longitud lo hace a una velocidad mayor. La velocidad de precesión corresponde a la velocidad de rotación del vector de mayor magnitud, en tanto que la velocidad

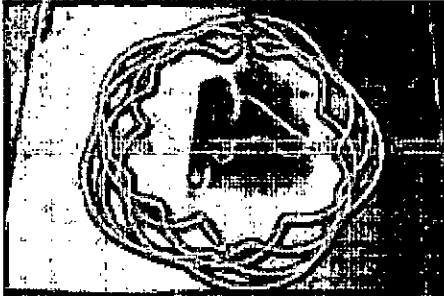


Figura 8: Trazo laser en el gir6scopo con contrapeso adelante

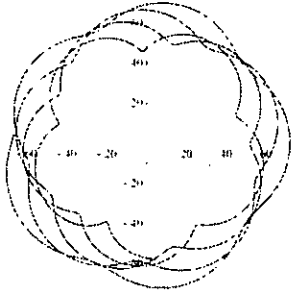


Figura 9: Ajuste de la ecuaci3n del trompo de la foto dada en la Figura 8 con $a_p=50.0$, $a_n=7.5$, $\gamma_p=0.012\omega_p$, $\gamma_n=0.02\omega_p$, $\gamma=0.00006$, $\omega_n=4.78\omega_p$ y $\omega_p=0.8928 \text{ s}^{-1}$.

de nutaci3n corresponde a la diferencia de la velocidades de los dos vectores. De forma aproximada se introdujo la fricci3n en el movimiento y se hall3 una soluci3n aceptable de movimiento real del trompo. La soluci3n se contrast3 con el experimento usando un gir6scopo comercial adaptandole un apuntador laser lo cual permite visualizar el movimiento del gir6scopo proyectado en el plano horizontal. Es posible visualizar la trayectoria del punto laser en el piso usando una c3mara fotogr3fica con tiempo de apertura controlable. De registros fotogr3ficos se puede determinar cantidades como las frecuencias de precesi3n y nutaci3n y el 3ngulo cenital. En conclusi3n el modelo coincide apreciablemente con el experimento en primera aproximaci3n, lo cual se puede apreciar en el buen ajuste de los par3metros de la soluci3n con las trayectorias trazadas por el punto laser.

- [1] An Introduction to Mechanics, David Kleppner & Robert J. Kolenkow, McGraw-Hill Book Co. (1978)
- [2] Classical Mechanics, third edition, Herbert Goldstein, Charles Poole & John Safko, Addison Wesley (2002)
- [3] Uniqueness of the angular velocity of a rigid body: Correction of two faulty proofs Nivaldo A. Lemos Am. J. Phys. 68, 668 (2000)

- [4] Balística Exterior, Francisco Cucharelo Pérez, Ministerio de Defensa, Madrid (1992).
- [5] Sobre el caso de Euler del movimiento de un cuerpo rígido, Eduardo Piña Garza, *Rev. Mex. Fis. E* (2) (2008) 92-103.
- [6] The Lorentz Group a galilean aproach, D. E. Jaramillo and N. Vanegas, *Rev. Mex. Fis. E* 50 (2004) 41.